基礎数理 基本演習 略解

問題 1. 以下のように計算すればよい.

$$\begin{aligned} h(A)+h(B) &= [h(A\setminus B)+h(A\cap B)]+[h(A\setminus B)+h(A\cap B)] \\ &= [h(A\setminus B)+h(A\cap B)+h(A\setminus B)]+h(A\cap B) \\ &= h(A\cup B)+h(A\cap B). \end{aligned}$$

なお，$A=\emptyset$ のときには $h(A)=0$ であることに注意.

問題 2.

$$a=\max_{i\in A\setminus B} w_i,\quad b=\max_{i\in B\setminus A} w_i,\quad c=\max_{i\in A\cap B} w_i$$

とおく．ただし，空集合上の最大値は $-\infty$ と約束する．すると，

$$f(A)=\max(a,c),\quad f(B)=\max(b,c),\quad f(A\cap B)=c,\quad f(A\cup B)=\max(a,b,c)$$

であり，

$$\begin{aligned} f(A)+f(B)&=\max(a+b,a+c,b+c,2c), \\ f(A\cap B)+f(A\cup B)&=\max(a+c,b+c,2c) \end{aligned}$$

となるので

$$f(A)+f(B)\geq f(A\cap B)+f(A\cup B).$$

問題 3. 同値関係の満たすべき 3 つの条件

反射律： $a\sim a$

対称律： $a\sim b\Rightarrow b\sim a$

推移律： $a\sim b,\, b\sim c\Rightarrow a\sim c$

をチェックすればよい．反射律は $a-a=0$ で成立．対称律は $a-b$ が 6 の倍数なら $b-a$ も 6 の倍数であるから成立．推移律は $a-b=6m,\ b-c=6n$ とすると $a-c=6(m+n)$ となるから成立.

問題 4. 反射律，対称律は明らか．推移律は次のように示される．$(a,b)\sim(a',b')$, $(a',b')\sim(a'',b'')$ とすると，$ab'=a'b$, $a'b''=a''b'$ である．もし $a'=0$ なら，$b'\neq 0$ より $a=a''=0$ であり $ab''=a''b$ が成り立つ．もし $a'\neq 0$ なら，上式を辺々掛けると $(ab'')(a'b')=(a''b)(a'b')$ となり，$ab''=a''b$ となる．いずれの場合にも $ab''=a''b$, すなわち $(a,b)\sim(a'',b'')$ となる.

問題 5. （1）同値関係の満たすべき 3 つの条件

反射律： $A\sim A$

対称律： $A\sim B\Rightarrow B\sim A$

推移律： $A \sim B,\, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

をチェックすればよい．反射律は $P = I$ で成立，対称律は P^{-1} を P だと思えばよい．推移律は $P^{-1}AP = B,\, Q^{-1}BQ = C$ とすると，$R = PQ$ に対して $R^{-1}BR = C$.

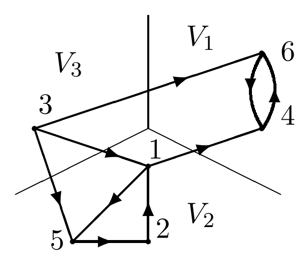
（2）$A_1 \sim B_1,\, A_2 \sim B_2$ であるとき，$A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$ となるかどうかを調べればよい．例えば，$A_1 = B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，これが成り立たないので well-defined でない．

問題 6. （1）反射律，対称律は明らか．推移律「$a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$」は，擬順序が推移律を満たすこと「$a \preceq b,\, b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$」，「$b \preceq a,\, c \preceq b \Rightarrow c \preceq a$」を使って容易に示される．

（2）代表元のとりかたによらないことを示せばよい．$a \in C_i,\, b \in C_j$ に対し，$a \preceq b$ であるとする．別の代表元 $a' \in C_i,\, b' \in C_j$ に対し，$a \sim a',\, b \sim b'$ より，$a' \preceq a$, $b \preceq b'$ となる．したがって，$a' \preceq a,\, a \preceq b,\, b \preceq b'$ であり，推移律より，$a' \preceq b'$ が成り立つ．

問題 7. 強連結成分：$V_1 = \{4, 6\},\, V_2 = \{1, 2, 5\},\, V_3 = \{3\}$

順序：$V_1 \prec V_2 \prec V_3$



問題 8. 記号 $\mathcal{L}$ の定義は $\mathcal{L} = \{A \mid \rho(A) \le \rho(B),\ \forall B\}$ である．任意の $X, Y \in \mathcal{L}$ に対して，$X \cup Y,\ X \cap Y \in \mathcal{L}$ が成り立つことを示せばよい．ρ の最小値を m とすると，$\rho(X) = \rho(Y) = m,\ \rho(X \cup Y) \ge m,\ \rho(X \cap Y) \ge m$ なので，劣モジュラ不等式 $\rho(X) + \rho(Y) \ge \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ と合わせて

$$2m = \rho(X) + \rho(Y) \ge \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \ge 2m.$$

したがって $\rho(X \cup Y) = \rho(X \cap Y) = m$ が成り立つ．

問題 9. （1）任意の $n \ge n_0$ に対して $|1/n^2| \le \varepsilon$ が成り立つようにするには，例えば，$n_0 = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$ とすればよい．ただし，$[\cdot]$ は実数の整数部分を表す．

（2）任意の $n \ge n_0$ に対して $|1/\log n| \le \varepsilon$ が成り立つようにするには，例えば，$n_0 = [\exp(1/\varepsilon)] + 1$ とすればよい．

（3）収束しない．$\varepsilon = 1/2$ に対しては，どんな n_0 を選んでも，$n \ge n_0$ を満たす平方数 n が存在する．このとき $|a_n - a| = 1/2 > \varepsilon$ となってしまう．

問題 10. ある M が存在して，任意の n に対して $|a_n| \le M$ が成り立つこと $(\exists M, \forall n : |a_n| \le M)$ を示せばよい．数列 (a_n) の収束先を a とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある n_0 が

存在し，$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon$ である．特に，$\epsilon = 1$ に対して，ある n_0 が存在し，$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq 1$ であるから，M を $|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a|+1$ の最大値とすると，$|a_n| \leq M$ が任意の n に対して成り立つ．

問題 11. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n_0 が存在して，任意の $m, n \geq n_0$ に対して $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい．一方，仮定より，数列 (a_n) はある a に収束するので，任意の $\varepsilon' > 0$ に対して，ある n_0' が存在して，$n \geq n_0'$ である任意の n に対して $|a_n - a| \leq \varepsilon'$ が成り立つ．$\varepsilon' = \varepsilon/2$ に対する n_0' を n_0 とすると，任意の $m, n \geq n_0$ に対して

$$|a_m - a| \leq \varepsilon/2, \quad |a_n - a| \leq \varepsilon/2$$

が成り立つので，これを加え合わせると

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

問題 12. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n_0 が存在して，任意の $m, n \geq n_0$ に対して $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい．$m \leq n$ のとき

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{m^2}$$

であるから，$n_0 = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$ とすればよい．ただし，$[\cdot]$ は実数の整数部分を表す．

問題 13. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n_0 が存在して，任意の $m, n \geq n_0$ に対して $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい．

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

に着目すると，$m \leq n$ のとき

$$|a_m - a_n| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$

であるから，$n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ とすればよい．ただし，$[\cdot]$ は実数の整数部分を表す．

問題 14. d が距離の公理を満たすことを示せばよい．$d(a,b) = d(b,a)$ は明らか．$d(a,b) \geq 0$ も明らか．等号が $a = b$ のときのみに成り立つことも，$d(a,b) = 0$ ならば各 n に対して $|a_n - b_n| = 0$ となるから明らか．三角不等式 $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ は次のように示される．実数の絶対値に関する三角不等式より，各 n に対して

$$|a_n - b_n| + |b_n - c_n| \geq |a_n - c_n|.$$

ここで，$d(a,b) \geq |a_n - b_n|$, $d(b,c) \geq |b_n - c_n|$ だから，

$$d(a,b) + d(b,c) \geq |a_n - c_n|.$$

ゆえに

$$d(a,b) + d(b,c) \geq \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n - c_n| = d(a,c).$$

問題 15. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)\mathrm{d}y = 1$ に注意すると，

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

関数 f の連続性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|y| \leq \delta \Rightarrow |f(x+y) - f(x)| \leq \varepsilon$. $n_0 \geq 1/\delta$ を満たす n_0 をとると，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(y)\,|f(x+y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{+\delta} K_n(y)\mathrm{d}y = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

問題 16. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)\mathrm{d}y = 1$ に注意すると，

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

関数 f の連続性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|y| \leq \delta \Rightarrow |f(x+y) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. この δ によって積分領域を二つに分けて，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq\delta} + \int_{|y|\geq\delta}$$

とすると，第 1 項は

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y|\leq\delta} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y \right| &\leq \int_{|y|\leq\delta} K_n(y)\,|f(x+y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y|\leq\delta} K_n(y)\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

第 2 項については以下のように評価する．関数 f の有界性より，ある $M > 0$ が存在して，任意の $z \in \mathbf{R}$ に対して $|f(z)| \leq M$. （この時点で，ε, δ, M が決まっているが，これらに応じて）ある n_0 が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\int_{|y|\geq\delta} K_n(y)\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

が成り立つ（n が大きくなると，K_n は原点付近に集中してくるから）．したがって，上の第 2 項は

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y|\geq\delta} K_n(y)[f(x+y) - f(x)]\mathrm{d}y \right| &\leq \int_{|y|\geq\delta} K_n(y)\,|f(x+y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq 2M \int_{|y|\geq\delta} K_n(y)\mathrm{d}y \\ &\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq n_0$ に対して $|f_n(x) - f(x)| \leq |$ 第１項 $| + |$ 第２項 $| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ となる．ゆえに $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

問題 17. （１）階数標準形（ランク標準形）$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. 不変量は階数（ランク）.

（２）Jordan 細胞 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ の直和 (Jordan 標準形). 不変量は Jordan 細胞の大きさと固有値.

（３）特異値を対角要素とする対角行列（特異値分解）. 不変量は特異値.

問題 18. （１）固有値を対角要素とする対角行列，不変量は固有値.

（２）正の固有値の個数を π,　負の固有値の個数を ν として $\begin{bmatrix} I_\pi & O & O \\ O & O & O \\ O & O & -I_\nu \end{bmatrix}$. 不変量は正，負の固有値の個数（符号）［Sylvester の慣性則］.

問題 19. 解をもつための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

これは

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{or} \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

と等価．したがって，$a \neq \pm\sqrt{2}$ or $(a, b) = \pm(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

問題 20. 解１：Laplace 展開により漸化式 $\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を得る．これより $\det A_n = \alpha n + \beta$ の形．ここで $\det A_1 = \det A_2 = 1$ ゆえ，$\alpha = 0, \beta = 1$ で $\det A_n = 1$.

解２：最後の行をひとつ上の行に加えると，最後の列が $0, 0, \ldots, 0, 1$ となり，左上の $n-1$ 次の部分行列は A_{n-1} に等しくなるので，$\det A_n = \det A_{n-1}$. ここで $\det A_1 = 1$ ゆえ，$\det A_n = 1$.

問題 21.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

問題 22. A を Hermite 対称行列として，λ を固有値 (複素数)，x を対応する固有ベクトル（複素ベクトル）とする．$Ax = \lambda x$ の左から x の共役転置 x^* を掛けて，$x^*Ax = \lambda x^*x$ となるが，x^*x は正の実数であり，$(x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$ より，x^*Ax も実数. ゆえに，λ は実数である.

問題 23. $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ として，固有値 $\exp(\mathrm{i}\theta)$ に対し，固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

固有値 $\exp(-\mathrm{i}\theta)$ に対し，固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$.

問題 24. 左上からとった首座小行列式がすべて正であること

$$a>0, \quad \det\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=a-1>0, \quad \det\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}=a-b^2-1>0$$

が必要十分条件である．これより，$a-b^2-1>0$．あるいは，右下からとった小行列式を考えると

$$1>0, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=1>0, \quad \det\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}=a-b^2-1>0$$

となって，同じ条件 $a-b^2-1>0$ が得られる．