解析数理工学 基本演習 略解

問題 1. (a)　区間 $[a,b]$ の分割 Δ とは閉区間 $[a,b]$ を有限個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ によって

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

のように分割することを意味する. それを $\Delta : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ と書くことがある.

(b)　$n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ が分割 Δ の分点である.

(c)　分割 $\Delta : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ のメッシュとは $\max\{a_k - a_{k-1}; 1 \leq k \leq n\}$ のことである. これを $\delta(\Delta)$ と書くことがある.

(d)　分割 Δ, Δ' を $\Delta : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b, \Delta' : a = a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_{n'} = b$ とする. Δ' が Δ の細分であるとは Δ のどの分点も Δ' のどれかの分点である, 即ち, 任意の k $(1 \leq p \leq n)$ に対し, ある p $(1 \leq p \leq n')$ が存在して, $a_k = a'_p$ が成り立つ, ことを言う. このとき, $1 \leq k \leq n$ なる各 k に対して, $1 \leq p < q \leq n'$ なる p, q が存在して

$$a_{k-1} = a'_{p-1} < a'_p < \ldots < a'_{q-1} < a'_q = a_k$$

が成り立つ.

問題 2. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ に対し, $a_{k-1} \leq \xi_k \leq a_k$ を満たす点 ξ_k $(1 \leq k \leq n)$ をとり, Riemann 和 R_Δ を

$$R_\Delta \equiv \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1})$$

で定義する. 関数 f が Riemann 積分可能であるとは

(i)　$\exists \lim_{\substack{\delta(\Delta)\to 0 \\ \Delta:\text{細分}}} R_\Delta \in \mathbf{R}$,

(ii)　(i) の値 (極限値) は ξ_k $(1 \leq k \leq n)$ によらない

が成り立つときを言う. このとき, (i) の値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く.

問題 3. 実数空間は完備であるから, Riemann 和の列 $(R_\Delta)_\Delta$ がコーシー列であることを示せばよい. 任意の正数 ϵ が与えられたとする. 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 f は一様連続であるから, ある正数 δ が存在して

$$|x - y| < \delta \quad (a \leq x, y \leq b) \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

が成り立つ. このとき, 分割 Δ でそのメッシュ $\delta(\Delta)$ が

$$\delta(\Delta) < \delta$$

を満たすものをとり, さらにその任意の細分 $\Delta' < \Delta'' < \Delta$ を考える. そのときのリーマン和 $R_{\Delta'}, R_{\Delta''}$ は

$$\begin{aligned} R_{\Delta'} &= \sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)(a'_k - a'_{k-1}) \\ R_{\Delta''} &= \sum_{k=1}^{n''} f(\xi''_k)(a''_k - a''_{k-1}) \end{aligned}$$

となる. 分割 Δ' は分割 Δ'' の細分であるから, $1 \leq k \leq n''$ なる各 k に対して, $1 \leq p < q \leq n'$ なる p, q が存在して

$$a''_{k-1} = a'_{p-1} < a'_p < \ldots < a'_{q-1} < a'_q = a''_k$$

が成り立つ. したがって, リーマン和 $R_{\Delta''}$ の第 k 目の項 $f(\xi''_k)(a''_k - a''_{k-1})$ は

$$f(\xi''_k)(a''_k - a''_{k-1}) = \sum_{j=p}^{q} f(\xi''_k)(a'_j - a'_{j-1})$$

と分解することができる. このとき

$$\begin{aligned} & f(\xi''_k)(a''_k - a''_{k-1}) - \sum_{j=p}^{q} f(\xi'_k)(a'_j - a'_{j-1}) \\ = & \sum_{j=p}^{q} (f(\xi''_k) - f(\xi'_k))(a'_j - a'_{j-1}) \end{aligned}$$

となるから,

$$|f(\xi''_k)(a''_k - a''_{k-1}) - \sum_{j=p}^{q} f(\xi'_k)(a'_j - a'_{j-1})| < \frac{\epsilon}{b-a}(a''_k - a''_{k-1})$$

が成り立つ. したがって

$$|R_{\Delta''} - R_{\Delta'}| < \sum_{k=1}^{n''} \frac{\epsilon}{b-a}(a''_k - a''_{k-1}) \leq \epsilon$$

が成り立つ. これは, Riemann 和の列 $(R_\Delta)_\Delta$ がコーシー列であることを示している.

問題 4. 閉区間 $[a, b]$ 上の関数 f を

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1 & (x = \text{有理数}), \\ 0 & (x = \text{無理数}) \end{cases}$$

で定める. Δ_n を閉区間 $[a, b]$ の n 等分の分割とする;$\Delta_n : a = a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \cdots < a_n^{(n)} = b$ $(a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n})$. $a_{k-1}^{(n)} \leq \xi_k \leq a_k^{(n)}$ を満たす有理数 ξ_k $(1 \leq k \leq n)$ をとり, Riemann 和 R_{Δ_n} を

$$R_{\Delta_n} \equiv \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k^{(n)} - a_{k-1}^{(n)})$$

を考える．$f(\xi_k)=1$ であるから，$R_{\Delta_n}=b-a$．一方，$a_{k-1}^{(n)} \leq \xi'_k \leq a_k^{(n)}$ を満たす無理数 ξ'_k $(1 \leq k \leq n)$ をとり，Riemann 和 R'_{Δ_n} を

$$R'_{\Delta_n} \equiv \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(a_k^{(n)} - a_{k-1}^{(n)})$$

を考える．$f(\xi'_k)=0$ であるから，$R'_{\Delta_n}=0$．したがって，関数 f はリーマン積分可能ではない．

問題 5. 関数 f が閉区間 [a,b] でリーマン積分可能だが，関数 f は閉区間 $[a,b]$ において有界でないとする．各 n に対して，$\Delta_n : a = a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \cdots < a_n^{(n)}$ を閉区間 $[a,b]$ の n 等分とする．$n \geq 1$ を固定する．各閉部分区間 $[a_{k-1}^{(n)}, a_k^{(n)}]$ $(1 \leq k \leq n)$ において関数 f が有界であれば，関数 f は閉区間 $[a,b]$ において有界となるので，すくなくとも一つの部分閉区間 $[a_{k_0-1}^{(n)}, a_{k_0}^{(n)}]$ $(1 \leq k_0 \leq n)$ において，関数 f は有界でない．そのような部分閉区間 $[a_{k_0-1}^{(n)}, a_{k_0}^{(n)}]$ 内の点 $\xi_{k_0}^{(n)}$ で，$|f(\xi_{k_0}^{(n)})|$ はいくらでも大きい値をとるようにとることができる．したがって，各閉部分区間 $[a_{k-1}^{(n)}, a_k^{(n)}]$ 内の点 $\xi_k^{(n)}$ $(1 \leq k \leq n)$ で，$|R_{\Delta_n}| \geq n$ を満たすようにとることができる．これでは，数列 $(R_{\Delta_n})_n$ は収束しない．これは，関数 f が閉区間 [a,b] でリーマン積分可能であることに反する．

問題 6. 微積分学の基本原理である $\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy = f(x)$ を用いよ．

問題 7. 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 f, g を

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \begin{cases} 1 & (a < x = b), \\ 0 & (x = a), \end{cases} \\ g(x) &\equiv 1 \ (a \leq x \leq b) \end{aligned}$$

で定める．どちらも，問題 6 の性質を満たすが，$f=g$ は成り立たない．一点 $x=a$ においてのみ異なるだけではあるが．

問題 6. (1)　f はリーマン積分可能であるから，問題 5 より，正数 c が存在して，$|f(x)| \leq c$ $(a \leq x \leq b)$ が成り立つ．さらに，μ_f の定義より

$$\mu_f([c,d]) = \int_c^d f(x)dx$$

が成り立つことに注意．このとき，$0 \leq \mu_f([c_j,d_j]) \leq c(d_j - c_j)$ が成り立つので，(1) が成り立つ．

(2)　(1) より従う．$a \leq c < b$ のときは，$d_j \equiv c + \frac{1}{j}$，$c=b$ のときは，$d_j \equiv c - \frac{1}{j}$ とおけば良い．

(3)　(1) で注意したことを用いれば，μ_f の定義より従う．

(4)　$p=2$ のときに，(4) を示すことができれば，p に関する数学的帰納法を用いることによって，一般の p に対して，(4) が成り立つことを示すことができる ($p=2$ の

ときの結果を再び使う). $p=2$ のときの証明の鍵は, $a \leq c < e < d \leq b$ に対し

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^e f(x)dx + \int_e^d f(x)dx$$

が成り立つことである. このことは

$$\mu_f([c,d]) = \mu_f([c,e]) + \mu_f([e,d])$$

を意味する. 即ち, 区間 $[c,d]$ を分割するという考えを用いることによって, $p=2$ のときを示すことができる.

問題 8. (1)　定義より明らか.

(2)　(1) と問題 7 の (2) より従う.

(3)　ν_f の定義より従う.

(4)　基本的な考えは問題 7 の (4) の解法と同じである.

問題 10. (1)　空集合 $\emptyset$ は要素を持たない集合であるから, $n(\emptyset)=0$.

(2)　$p=2$ のときに, (2) を示すことができれば, p に関する数学的帰納法を用いることによって, 一般の p に対して, (2) が成り立つことを示すことができる ($p=2$ のときの結果を再び使う). $p=2$ とする. A_1 と A_2 が互いに交わらないということは, A_1 と A_2 は共通な要素を持たないのであるから, $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$ が成り立つ.

問題 11. (3)　$B = A \cup (B \cap A^c)$ と直和分解 (A と $B \cap A^c$ とは互いに交わらない) されるので, (2) より, $n(B) = n(A) + n(B \cap A^c)$. しかし, $n(B \cap A^c) \geq 0$ であるから, $n(A) \leq n(B)$ が成り立つ.

(別証明) $A \subset B$ ということは, A の要素は B の要素のことであるから, $n(A) \leq n(B)$ が成り立つ.

(4)　$p=2$ のときに, (4) を示すことができれば, p に関する数学的帰納法を用いることによって, 一般の p に対して, (4) が成り立つことを示すことができる ($p=2$ のときの結果を再び使う). $p=2$ とする. A_1 と A_2 は共通な要素を持つことがあるので, $n(A_1 \cup A_2) \leq n(A_1) + n(A_2)$ が成り立つ.

問題 12. 問題 10 と全く同じ考えで問題 12 を示すことができる.

問題 13. 問題 11 と全く同じ考えで問題 13 を示すことができる.

問題 14. (1)　問題 10 の (1) と全く同じ考えで (1) を示すことができる.

(2)　集合 A_j $(1 \leq j \leq p)$ の中でひとつでも $\mathcal{F}^c$ の元であれば, 集合 $\cup_{j=1}^p A_j$ もまた $\mathcal{F}^c$ の元である. したがって, 示すべき両辺はともに無限大となり, 等しくなる. 集合 A_j $(1 \leq j \leq p)$ のどれもが $\mathcal{F}^c$ の元でなければ, 問題 11 の (2) より従う.

(2)'　集合 A_j $(j=1,2,\ldots)$ の中でひとつでも $\mathcal{F}^c$ の元であれば, 集合 $\cup_{j=1}^\infty A_j$ もまた $\mathcal{F}^c$ の元である. したがって, 示すべき両辺はともに無限大となり, 等しくなる.

集合 A_j $(j=1,2,\ldots)$ のどれもが $\mathcal{F}^c$ の元でないとする. さらに, どれもが空集合でないとしても良い (何故だか考えよ). このとき, 示すべき式の両辺は無限大となる.

問題 15. 問題 14 の (2)' において, $A_j \equiv \emptyset$ $(j \geq p+1)$ とおけば良い.

問題 16. (1) 問題 11 の (1) と全く同じ考えで示すことができる.

(2) 一般的な簡明な証明を与えてみよう. 新しい集合 B_j $(j=1,2,\ldots)$ を

$$B_1 \equiv A_1,$$
$$B_j \equiv A_j \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{j-1})^c \ (j \geq 2)$$

で定義するとき

$$\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j,$$
$$B_j \ (j=1,2,\ldots) \text{ は互いに交わらない}$$

が成り立つことが鍵である (各自確認せよ). このとき, 問題 14 の (2)' より

$$n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = n(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} n(B_j).$$

しかし, $n(B_j) \leq n(A_j)$ であるから, (4) が成り立つ.

ただし, $[\cdot]$ は実数の整数部分を表す.

問題 17. 問題 16 の (3) より, 任意の p に対して

$$n(A_p) \leq n(A_{p+1}) \leq n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

集合 A_j $(j=1,2,\ldots)$ の中でひとつでも $\mathcal{F}^c$ の元であれば, それを A_{p_0} とすれば, $n(\cup_{j=1}^{p_0} A_j) = \infty$. 故に, 上の不等式より, $n(A_p) \nearrow n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$.

集合 A_j $(j=1,2,\ldots)$ のどれもが $\mathcal{F}^c$ の元でないとする. 問題 16 で構成した B_j $(j=1,2,\ldots)$ を用いることにする. このとき, 任意の p に対して, $A_p = \cup_{j=1}^{p} A_j = \cup_{j=1}^{p} B_j$ も成り立つことに注意する. したがって, 問題 14 の (2) より

$$n(A_p) = n(\cup_{j=1}^{p} A_j) = n(\cup_{j=1}^{p} B_j) = \sum_{j=1}^{p} n(B_j).$$

一方, $A_j \subset A_{j+1}$ ならば, $B_j = A_j \cap A_{j-1}^c$ $(j \geq 2)$. したがって, $A_j = A_{j-1} \cup B_j$. ゆえに, $n(B_1) = n(A_1), n(B_j) = n(A_j) - n(A_{j-1})$. 故に,

$$\sum_{j=1}^{p} n(B_j) = n(A_p).$$

したがって, $n(A_p) \nearrow n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$.

問題 18. 示すべきことは極限定理であるから，n_0 以上の j を考えればよい． 新しい集合 D_j $(j=1,2,\ldots)$ を

$$D_j \equiv A_{n_0} \cap A^c_{n_0+j}$$

と定義する．このとき

$$D_j \subset D_{j+1},$$
$$\cup_{j=1}^{\infty} D_j = A_{n_0} \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)^c$$

が成り立つ．したがって, 問題 17 より,

$$n(D_p) \nearrow n(\cup_{j=1}^{\infty} D_j).$$

ところが, $n(A_{n_0+j}) < \infty$ であるから, $n(D_j) = n(A_{n_0}) - n(A_{n_0+j}), n(\cup_{j=1}^{\infty} D_j) = n(A_{n_0}) - n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)$. したがって, 両辺から, $n(A_{n_0+j})$ を引き去って, $n(A_p) \searrow n(\cap_{j=1}^{\infty} A_j)$.

問題 19. 自然数の集合 $S = \mathbf{N}$ を考え, その部分集合列 $(A_j)_{j\in\mathbf{N}}$ として, $A_j = \{k \in S; k \geq j\}$ をとる．このとき, $A_j \supset A_{j+1}$ であり, $\cap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$ である．ところが, $n(A_j) = \infty$, $n(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) = n(\emptyset) = 0$.

問題 20. (1)　$a \notin \emptyset$ であるから, $\delta_a(\emptyset) = 0$.

(2)　$a \in \cup_{j=1}^{p} A_j$ のときは, 唯一つの $j_0 \in \{1,2,\ldots,p\}$ が存在して, $a \in A_{j_0}$. このとき, j_0 以外の j に対して, $a \notin A_j$ であるから, $\delta_a(A_{j_0}) = 1, \delta_a(A_j) = 0$ $(j \neq j_0)$. したがって, 示すべき式の両辺は 1 となり, 等しい. 次に, $a \notin \cup_{j=1}^{p} A_j$ のときは, すべての　j に対して, $a \notin A_j$ であるから, $\delta_a(\cup_{j=1}^{p} A_j) = 0, \delta_a(A_j) = 0$ $(1 \leq j \leq p)$. したがって, 示すべ式の両辺は 0 となり, 等しい.

(2)'　この場合の可算個の場合であっても, 有限個の場合の (2) の証明の考えは有効である.

(3)'　解 1:$a \in A$ のとき, $a \in B$. したがって, $\delta_a(A) = 1 = \delta_a(B)$. $a \notin A$ のとき, $\delta_a(A) = 0 \leq \delta_a(B)$.

解 2:分解 $B = A \cup (B \cap A^c)$ は直和分解であるから, (2) より

$$\delta_a(B) = \delta_a(A) + \delta_a(B \cap A^c) \geq \delta_a(A).$$

(4)　$a \in S$ であるから, $\delta_a(S) = 1$.

問題 21. 問題 20 の (2)' において, $A_j \equiv \emptyset$ $(j \geq p+1)$ とおけば良い.

問題 22. (1)　問題 21 の (1) より, $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^{m} c_j \delta_{a_j}() = \sum_{j=1}^{m} c_j 0 = 0$.

(2)　問題 21 の (2) より

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{j=1}^{p} A_j) &= \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{a_k}(\cup_{j=1}^{p} A_j) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k (\sum_{j=1}^{p} \delta_{a_k}(A_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (\sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{a_k}(A_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \mu(A_j).\end{aligned}$$

(2)'　問題 21 の (2)' より

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) &= \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{a_k}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k (\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(A_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{a_k}(A_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).\end{aligned}$$

(3)　分解 $B = A \cup (B \cap A^c)$ は直和分解であるから, (2) より

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

(4)　問題 16 の (2) の証明で用いた考えを使って, そこで用いた直和分解を使う. 新しい集合 B_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を

$$\begin{aligned}&B_1 \equiv A_1, \\ &B_j \equiv A_j \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{j-1})^c \ (j \geq 2)\end{aligned}$$

で定義するとき

$$\begin{aligned}&\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j, \\ &B_j \ (j = 1, 2, \ldots) \text{ は互いに交わらない}\end{aligned}$$

が成り立つことが鍵である. このとき, 問題 22 の (2)' より

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

しかし, (3) より, $\mu(B_j) \leq \mu(A_j)$ であるから, (4) が成り立つ.

問題 23. (1)　S の任意の点 x をとる. $x \in A$ のとき, $\chi_A(x) = 1 = \delta_x(A)$. $x \notin A$ のとき, $\chi_A(x) = 0 = \delta_x(A)$.

(2) 示すべき式の左辺の集合 A の任意の点 y をとる. $chi_A(y) = 1$ となるから, $y \in \{x \in S; \chi_A(x) = 1\} =$ 右辺. 次に, 示すべき式の右辺の集合 $\{x \in S; \chi_A(x) = 1\}$ の任意の点 y をとる. $chi_A(y) = 1$ となるから, $y \in A =$ 左辺.

問題 24. (1)　$\underline{A}_n$ の任意の点 x をとる. $\underline{A}_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ であるから, $x \in A_n$. 次に, $\overline{A}_n$ の任意の点 x をとる. $\overline{A}_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ であるから, $x \in \overline{A}_n$.

(2)　$\underline{A}_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cap \cap_{k=n+1}^{\infty} A_k = A_n \cap \underline{A}_{n+1}$ であるから, $\underline{A}_n \subset \underline{A}_{n+1}$.

(3)　$\overline{A}_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup_{k=n+1}^{\infty} A_k = A_n \cup \overline{A}_{n+1}$ であるから, $\overline{A}_n \supset \overline{A}_{n+1}$.

問題 25. (1)　任意の n を固定する. それ以上の m をとる. (1) と (3) より

$$\underline{A}_m \subset \overline{A}_m \subset \overline{A}_n.$$

ここで, m についての和集合をとって

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \overline{A}_n.$$

次に, n についての和集合をとって

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

(2)　$\liminf_{n\to\infty} A_n$ の任意の点 x をとる. $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n$ であるから, ある n_0 が存在して, $x \in \underline{A}_{n_0}$. 一方, $\underline{A}_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ であるから, n_0 以上のすべての n に対し, $x \in A_n$. したがって, $x \in$ 示すべき式の右辺の集合.

逆に, 示すべき式の右辺の集合の任意の点 x をとる. $\underline{A}_{n_0} = \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ であるから, $x \in \underline{A}_{n_0}$. さらに, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n$ であるから, $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$.

(3)　$\limsup_{n\to\infty} A_n$ の任意の点 x をとる. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ であるから, すべての n に対して, $x \in \overline{A}_n$. 特に, $x \in \overline{A}_1$. 一方, $\overline{A}_1 = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ であるから, ある n_1 が存在して, $x \in A_{n_1}$. 次に, $x \in \overline{A}_{n_1+1}$. 一方, $\overline{A}_{n_1+1} = \cup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$ であるから, n_1 より大きなある n_2 が存在して, $x \in A_{n_2}$. この操作を繰り返すことによって, 無限に多くの自然数 n_k $(n_k < n_{k+1}, k \in \mathbf{N})$ が存在して, すべての自然数 k に対し, $x \in A_{n_k}$. したがって, $x \in$ 示すべき式の右辺の集合.

逆に, 示すべき式の右辺の集合の任意の点 x をとる. 任意の n をとる. n より大きな自然数 n_k が取れる. このとき, $x \in A_{n_k}$ である. 一方, $\overline{A}_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ であるから, $x \in \overline{A}_n$. したがって, $x \in \cap \overline{A}_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(4)

$$\begin{aligned} (\liminf_{n\to\infty} A_n)^c &= (\cup_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n)^c \\ &= \cap_{n=1}^{\infty} (\underline{A}_n)^c. \end{aligned}$$

一方, すべての n に対し

$$\begin{array}{rcl}(\underline{A}_n)^c &=& (\cap_{k=n}^{\infty} A_k)^c \\ &=& \cup_{k=n}^{\infty} A_k^c \\ &=& \overline{A}_n.\end{array}$$

したがって

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n^c = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

(5)

$$\begin{array}{rcl}(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c &=& (\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n)^c \\ &=& \cup_{n=1}^{\infty} (\overline{A}_n)^c.\end{array}$$

一方, すべての n に対し

$$\begin{array}{rcl}(\overline{A}_n)^c &=& (\cup_{k=n}^{\infty} A_k)^c \\ &=& \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c \\ &=& \underline{A}_n\end{array}$$

したがって

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n^c = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

問題 26. 集合間の演算 $\subset$ と実数間の演算 $\le$, 集合間の演算 $\supset$ と実数間の演算 $\ge$ が対応し, 集合間の演算 $\cap$ と実数間の演算 inf, 集合間の演算 $\cup$ と実数間の演算 sup が対応することに注意する. したがって, 集合間の演算 $\cap_{k=n}^{\infty}$ と実数間の演算 $\inf_{k\ge n}$, 集合間の演算 $\cup_{k=n}^{\infty}$ と実数間の演算 $\sup_{k\ge n}$ が対応する. したがって, 問題 24 の (1),(2),(3) に対応して, 問題 26 の (1),(2),(3) が成り立つことが示される.

問題 27. 証明は問題 25 の (1) と同じである. 任意の n を固定し, それ以上の m をとる. 問題 26 の (1) と (3) より

$$\underline{a}_m \le \underline{a}_m \subset \overline{a}_n.$$

ここで, m についての上限をとって

$$\liminf_{m\to\infty} a_m \le \overline{a}_n.$$

次に, n についての下限をとって

$$\liminf_{m\to\infty} a_m \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$