確率数理工学 基本演習 略解

問題 1.

$$\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 15\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

ただし

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

は 2 項係数.

問題 2.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{6}.$$

問題 3.

$$\frac{6!}{1!\,2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^3 .$$

ここで自然数 n を k 個の自然数 $n_1, \ldots, n_k$ の和とする時

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

は多項係数とよばれる．多項係数は，n 個の区別できるボールと k 個の区別できる箱を考え，i 番目の箱に n_i 個のボールを入れるようなやり方の総数を表す.

問題 4. 前半は明らか．後半の $P(A \cup B \cup C)$ については，$A \cup B$ と C に分けて帰納的に考えることにより，容易に

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

となることがわかる.

問題 5. 1) $\sum_{1\le i\le n} x_i$ は $\sum_{i=1}^n x_i$ と同じ．2) $\sum_m^n x_i$ は $x_m + \cdots + x_n$ の意味．3)

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n$$

であり，添字 i, j が異なりかつ区別できる項を 1 回づつ足しあわせたもの.

問題 6. 前半は $(x_1 + \cdots + x_n)^2$ を展開して x_i^2 の形の項の和とクロス項 x_ix_j, $i \ne j$, の和に表したもの．$(x_1 + \cdots + x_n)^3$ の時は，x_i^3 の項，$x_i^2x_j$, $i \ne j$, の形の項，および $x_ix_jx_k$, $i \ne j \ne k \ne i$, の形の項を区別して

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^3 = \sum_{i=1}^n x_i^3 + 3\sum_{i\ne j} x_i^2 x_j + 6\sum_{1\le i<j<k\le n} x_ix_jx_k$$

となる．3,6 は多項係数である.

問題 7.
$$Q(b) = b^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
は b については下に凸の 2 次方程式である．最小値を与える b は
$$0 = Q'(b) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$
と求められ，その時の最小値は
$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$
である．$Q(b)$ は常に非負だからこの最小値も非負である．

問題 8. 前問より $\sum_{i=1}^n y_i^2 \geq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2$ となり
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2.$$
を得る．等号条件はある b について $y_i = bx_i,\ i = 1, \ldots, n$ となることである．

問題 9. 等比級数の公式より
$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots$$
である．これを c 倍して $\sum_{i=1}^\infty c^i = c/(1-c)$．級数が収束する範囲は $|c| < 1$．解析学の教科書にあるように無限級数の収束半径内では，級数の項別微分が可能で，$1/(1-c) = 1 + c + c^2 + \cdots$ を c で微分することにより
$$\frac{1}{(1-c)^2} = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} i c^{i-1}$$
である．級数が収束する範囲はやはり $|c| < 1$.

問題 10. 期待値は
$$2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ .$$

問題 11. 6 が出た時を回数として数えるか数えないかで 1 だけ違いが生じるが，ここでは回数に数えることとする．X 回目にはじめて 6 が出る確率は，$c = 5/6$ とおくと，$c^{X-1}(1-c)$ で与えられるから，問題 9 を用いて期待値は
$$\sum_{x=1}^{\infty} x c^{x-1}(1-c) = (1-c)\frac{1}{(1-c)^2} = \frac{1}{1-c} = 6$$
と求まる．

問題 12. この問題でも最後の 2 回を数えるかどうかがで 2 の違いが生じるが，ここでは最後の 2 回も回数に数えることとする．この問題では，確率を直接評価しようとするとやや面倒であり，次のように考えると簡単となる．求める期待値を E とおき，最初に表が出たかどうかで場合わけして考える．最初に表が出たとすると次に続けて表が出れば 2 回ですぐに終る．最初に表が出て次に裏が出るとご破算となり，コインをなげる前と同じ状況に戻る．また最初に裏が出たとすると，やはりコインを投げる前と同じ状況である．この事から

$$E = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (2+E)\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (1+E) \times \frac{1}{2}$$

が成り立ち，これを解けば期待値は $E = 6$ と求められる．

問題 13. 例えば X を 0.1 刻みで切り下げて考えると，$0.0, \ldots, 0.9$ の 10 個の値が同様に確からしくなり，切り下げた確率変数の期待値は

$$\frac{1}{10}(0.0 + \cdots + 0.9) = 0.45$$

となる．これは $0 \le x \le 1$ の範囲で，45 度線 $y = x$ と x 軸で囲まれる 3 角形の面積 $(= 1/2)$ を求める積分を和で近似していることにあたる．刻みを細かくすることにより期待値は $E(X) = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = 1/2$ で与えられることがわかる．

問題 14.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x}_n + \bar{x}_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \bar{x}_n^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}_n^2 + \bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}_n^2.
\end{aligned}$$

問題 15.

$$\frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) = \frac{1}{6}\frac{1}{6}6 \cdot 7 \cdot 13 = \frac{91}{6} \ .$$

問題 16.

$$\begin{aligned}
\sum_x (x-\mu)^2 p(x) &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2)p(x) \\
&= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.
\end{aligned}$$

問題 17. xy 平面で，x 軸が 1 から 6 までの整数，y 軸も 1 から 6 までの整数からなる 36 個の点 (格子点) を考える．サイコロを 2 回投げた時の目の組を (X, Y) とおくと，(X, Y) は 36 個の点を同様に確からしくとる．36 個の点のうち $|X - Y| \ge 3$ となる点の個数は左上の右下に 12 個ある．従って

$$P(|X - Y| \ge 3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

と求められる．次に $|X-Y|$ がとり得る値を考えると，0 から 5 までの可能性があり，それぞれの確率は $6/36, 10/36, 8/36, 6/36, 4/36, 2/36$ となる．従って期待値は

$$E(|X-Y|) = \frac{1}{36}(10+16+18+16+10) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

となる．

問題 18. (X,Y) の組を選ぶことは xy 平面の単位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ から 1 点を無作為に選ぶことに対応する．単位正方形の中で $|x-y| \geq 1/2$ となる部分の面積を考えると，左上の三角形と右下の三角形の面積の和より

$$P(|X-Y| \geq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

となる．次に $E(|X-Y|)$ を考える．任意の $0 < c < 1$ について同様に考えると $P(|X-Y| \geq c) = (1-c)^2$ となる．この事から Δc を小さい正の数として

$$P(c < |X-Y| \geq c+\Delta c) = (1-c+\Delta c)^2 - (1-c)^2 = 2(1-c)\Delta c + (\Delta c)^2$$

となる．積分を和で近似して極限操作をすると $(\Delta c)^2$ の項の影響は消えてしまうので

$$E(|X-Y|) = \int_0^1 c2(1-c)\mathrm{d}c = 2\int_0^1 (c-c^2)\mathrm{d}c = \frac{1}{3}$$

を得る．(確率密度関数の概念を知っていればこの問題は容易に解答できる．)

問題 19. $Z = X^2+Y^2$ とおく．任意の $0<c<1$ について $Z \leq c$ を考えると，円の面積比から

$$P(Z \leq c) = P(\sqrt{Z} \leq \sqrt{c}) = \frac{\pi(\sqrt{c})^2}{\pi 1^2} = c$$

となっている．このことは Z が一様乱数であることを示している．従って $E(X^2+Y^2) = E(Z) = 1/2$ である．

問題 20.

$$E[(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2] = E(X_1^2)+E(Y_1^2)+E(X_2^2)+E(Y_2^2)-2E(X_1X_2)-E(Y_1Y_2)$$

を求めればよい．前問より

$$\frac{1}{2} = E(X_1^2)+E(Y_1^2) = E(X_2^2)+E(Y_2^2)$$

である．ところで $E(X_1X_2)$ において X_2 を $-X_2$ におきかえても円の対称性から期待値は変わらないはずである．このことから $E(X_1X_2) = -E(X_1X_2)$ とならなければならず，従って $E(X_1X_2) = 0$ がわかる．同様に $E(Y_1Y_2) = 0$ である．従って

$$E[(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2] = 1$$

を得る．