代数数理工学 基本演習 問題

問題 1. 束 L の任意の元 $x, y, z \in L$ に対して, 以下の (1)–(3) を示せ.

(1) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \preceq x \wedge (y \vee z)$.

(2) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \succeq x \vee (y \wedge z)$.

(3) $x \preceq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge z$.

問題 2. 分配束はモジュラ束であることを示せ.

問題 3. 対称群 S_4 に関して, 以下の設問 (1)–(4) に答えよ.

(1) S_4 の位数はいくつか.

(2) S_4 の部分群のうちで, 位数が 3 となるものの例を示せ.

(3) S_4 の部分群のうちで, 位数が 8 となるものの例を示せ.

(4) 立方体を不変にする回転変換全体のなす群が S_4 と同型であることを示せ.

問題 4. Burnside の定理を応用して, 以下の設問 (1)–(3) に答えよ.

(1) 立方体の各頂点を k 色で彩色する方法は何通りあるか?

(2) 立方体の各面を k 色で彩色する方法は何通りあるか?

(3) 立方体の各辺を k 色で彩色する方法は何通りあるか?

問題 5. 位数有限の整域は体となることを示せ.

問題 6. 整域 R 上の非負整数値関数 φ に関して, 任意の $s \in R$ と $t \in R \backslash \{0\}$ に対し, $s = qt + r$ を満たす適当な $q, r \in R$ が存在して, $r = 0$ または $\varphi(r) < \varphi(t)$ となるとき, R を Euclid 整域という. $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ が Euclid 整域となることを示せ.

問題 7. Euclid 整域は単項イデアル整域となることを示せ.

問題 8. 多項式環 $\mathbf{R}[x, y]$ が単項イデアル整域でないことを示せ.

問題 9. 整域 R の可逆でない元 $r \neq 0$ について考える. 分解 $r = st$ があれば, $s \in R$ または $t \in R$ が可逆元となるとき, r を既約元という. 一方, $r | st$ ならば $r | s$ または $r | t$ となるとき, r を素元という.

(1) 素元は既約元であることを示せ.

(2) $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ において, 2 は既約元であるが素元ではないことを示せ.

問題 10. 次の整数行列 A, B, C の単因子標準形 (Smith 標準形) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 36 \\ 6 & 12 & 24 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

問題 11. 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上で, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の最小多項式を求めよ.

問題 12. $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ に関して, 以下の設問 (1)–(8) に答えよ.

(1) $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ に対して $f(\sqrt{2})$ を対応づける写像 φ が $\mathbf{Q}[X]$ から $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ への全射準同型であることを示せ.

(2) $\operatorname{Ker}\varphi$ は何か?

(3) $\operatorname{Ker}\varphi$ が $\mathbf{Q}[X]$ のイデアルとなることを示せ.

(4) $\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathbf{Q}[X]$ の素イデアルか?

(5) $\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathbf{Q}[X]$ の極大イデアルか?

(6) 準同型写像 $\bar{\varphi} : \mathbf{Q}[X]/\operatorname{Ker}\varphi \to \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ を構成せよ.

(7) $\bar{\varphi}$ が同型写像であることを示せ.

(8) $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ が体となることを示せ.

問題 13. $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ に関して, 以下の設問 (1)–(4) に答えよ.

(1) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ が整域となることを示せ.

(2) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ において, $1+\sqrt{2}$ が可逆元であることを示せ.

(3) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ に可逆元が無限にあることを示せ.

(4) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ の商体は何か?

問題 14. 自然数の組 m, n に関して, $m|n$ となるとき, かつそのときに限り, $(x^m - 1)|(x^n - 1)$ となることを示せ.

問題 15. Eisenstein の既約判定法を応用して, p が素数のときに, 多項式 $f(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-1}$ が $\mathbf{Q}$ 上の既約多項式であることを示せ.

問題 16. 有限体 GF(31) において, 23 の乗法逆元を計算せよ.