幾何数理工学 基本演習 問題

位相空間・トポロジー

問題 1. 次の関数 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は距離関数であるかどうか調べよ.

(1) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

(2) $d(x,y) = |x^3 - y^3|$

問題 2. d, d' はそれぞれ集合 X 上の距離関数であるとする $(d, d' : X \times X \to \mathbb{R})$. また, ある正の定数 a が存在して, X の任意の 2 点 x, y に対して,

$$d(x,y) \leq a \cdot d'(x,y)$$

が成立するとする. このとき, 距離空間 (X,d) の開集合は, 距離空間 (X,d') の開集合になることを示せ.

問題 3. 集合 X, Y とそれぞれの位相 $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ を以下のように定める.

$$X = \{1,2,3,4\}\ , \quad \mathcal{T}_X = \{\varnothing, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, X\}$$
$$Y = \{a,b,c\}\ , \quad \mathcal{T}_Y = \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, Y\}$$

写像 $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ を $f(1) = f(3) = a$, $f(2) = b$, $f(4) = c$ により定める. このとき, f は連続写像であるかどうか調べよ.

問題 4. X, Y を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. また, A は X の部分空間であるとする. このとき, 定義域を A に制限した写像 $f|_A : A \to Y$ と Y の開集合 O に対し,

$$(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$$

が成り立つことを示せ. また, $f|_A$ は連続写像であることを示せ.

問題 5. 連結性は位相同型写像で変わらない性質である. このことを利用して, 円周 S^1 と閉区間 $I = [-1,1]$ は位相同型ではない ($S^1 \not\approx I$) ことを示せ.

問題 6. ホモトピー論では, 位相空間 X の点 p を基点とするループ全体の集合 $\Omega(X,p)$ とループ間の同値関係 $\simeq$ (ホモトープ) に注目する. 基点 p につねに静止するループを $\tilde{p}$ とすると,

$$\forall \ell \in \Omega(X,p) \text{ に対して } \tilde{p} \cdot \ell \simeq \ell \qquad (\,\cdot \text{ は道の積})$$

が成り立つ．このことを，$(\tilde{p}\cdot\ell)(t)$ から $\ell(t)$ へのホモトピー $F(t,s)$ を具体的に与えることにより示せ $(F:[0,1]\times[0,1]\to X)$．また，$s=\frac{1}{2}$ に固定したとき，ホモトピー $F(t,\frac{1}{2})$ はどのような軌跡を描くか説明せよ．

問題 7. 2 単体 $\Delta^2=|p_0p_1p_2|$ は 3 点 $p_0,\ p_1,\ p_2$ を頂点とする 3 角形に対応することを示せ．

問題 8. 2 点 $p_0,\ p_1$ を結ぶ線分を表す複体 $K=\{|p_0|,|p_1|,|p_0p_1|\}$ の 0 次元ホモロジー群 $H_0(K)=Z_0(K)/B_0(K)$ を，以下にしたがい求めよ．ここで，$Z_0,\ B_0$ は 0 次元輪体群，0 次元境界輪体群をそれぞれ表す．

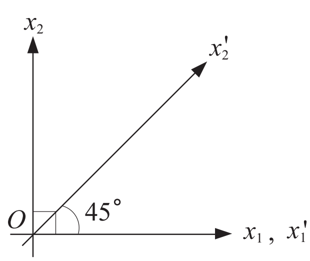
(1) 0 次元鎖 $c\in C_0(K)$ に対する境界準同型 $\partial_0(c)$ を調べることにより，$Z_0(K)=C_0(K)$ となることを示せ．ここで，C_0 は 0 次元鎖群を表す．

(2) 1 次元鎖 $c\in C_1(K)$ に対する境界準同型 $\partial_1(c)$ を調べることにより，$B_0(K)$ の要素を向きづけられた 0 単体 $\langle p_0\rangle,\ \langle p_1\rangle$ を用いて表せ．ここで，C_1 は 1 次元鎖群を表す．さらに，$Z_0(K)$ の要素を $B_0(K)$ の要素を用いて表せ．

(3) 同型写像 $\varphi:H_0(K)\to\mathbb{Z}$ を具体的に与えることにより，$H_0(K)$ と整数加群 $\mathbb{Z}$ は同型である $(H_0(K)\cong\mathbb{Z})$ ことを示せ．

テンソル

問題 9. 通常の平面 (2 次元ユークリッド空間) において，下図のような，原点が等しい二つの座標系 Σ と Σ' が与えられているとする．直交座標系 Σ の座標軸 $x_1,\ x_2$ に対し，斜交座標系 Σ' の x_1' 軸は x_1 軸と一致し，x_2' 軸は x_1 軸に対して 45 度傾いている．このとき，以下の問題に答えよ．



(1) Σ の x_1 軸，x_2 軸上の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とし，Σ' の x_1' 軸，x_2' 軸上の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2'$ とする．これらの単位ベクトルの関係

$$\boldsymbol{e}_j=A_{1j}\boldsymbol{e}_1'+A_{2j}\boldsymbol{e}_2'=\sum_{i=1}^{2}A_{ij}\boldsymbol{e}_i'\quad (j=1,2)$$

を与える行列 $A=(A_{ij})$ の成分を求めよ．

(2) 点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の Σ に関する成分は $(2,1)$ であるとする．このとき，位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の Σ' に関する成分を求めよ．

(3) スカラー関数 $f(x_1, x_2)$ の勾配ベクトル $\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2)$ の Σ に関する成分は $(2,1)$ であるとする．このベクトルの Σ' に関する成分 $(\partial f/\partial x'_1, \partial f/\partial x'_2)$ を求めよ．

問題 10. 通常の空間 (3 次元ユークリッド空間) において，2 つの異なる基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ に対する座標系をぞれぞれ Σ, Σ' とする．また，Σ の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\kappa$ の Σ' に関する成分を $(A_\kappa^{1'}, A_\kappa^{2'}, A_\kappa^{3'})$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{e}_\kappa = A_\kappa^{1'}\boldsymbol{e}_{1'} + A_\kappa^{2'}\boldsymbol{e}_{2'} + A_\kappa^{3'}\boldsymbol{e}_{3'} = A_\kappa^{\kappa'}\boldsymbol{e}_{\kappa'} \quad (\kappa = 1, 2, 3)$$

とする (注：テンソルの記法を用いている).

このとき，行列 $A = (A_\kappa^{\kappa'}) = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{pmatrix}$ は正則であることを示せ．

問題 11. 通常の空間 (3 次元ユークリッド空間) において，点 (x^1, x^2, x^3) と点 $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ の対応を与えるアフィン変換

$$x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa + a^{\kappa'} \quad (\kappa' = 1', 2', 3') \quad , \qquad \det A = \det(A_\kappa^{\kappa'}) \neq 0$$

を考える（注：テンソルの記法にしたがい，点の座標を (x_1, x_2, x_3) の代わりに (x^1, x^2, x^3) で表している）．このアフィン変換により，以下の幾何学的性質が変わるかどうか調べよ．

(1) 2 つの平行な直線

(2) 2 点間の距離

(3) 同一直線上の 3 点 P_1, P_2, P_3 に対する線分の長さの比 $\overline{P_1P_2} : \overline{P_1P_3}$

問題 12. 3 次元 アフィン空間において，座標系 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\Sigma'\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ の基底の関係が次のように与えられているとする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_{1'} + 2\boldsymbol{e}_{2'} + 2\boldsymbol{e}_{3'} \\ \boldsymbol{e}_2 &= 3\boldsymbol{e}_{2'} + 2\boldsymbol{e}_{3'} \\ \boldsymbol{e}_3 &= 3\boldsymbol{e}_{1'} + 4\boldsymbol{e}_{2'} + 4\boldsymbol{e}_{3'} \end{aligned}$$

Σ に関して，反変ベクトル v^κ と共変ベクトル w_κ の成分は，それぞれ $(v^1, v^2, v^3) = (2, 1, 2)$, $(w_1, w_2, w_3) = (2, 1, 2)$ であるとする．このとき，Σ' に関する成分をそれぞれ求めよ．

問題 13. 問題 12 の空間と座標系 Σ, Σ' を考える．Σ に関して次の成分をもつ反変 1 価, 共変 1 価のテンソル T^{κ}_{λ} の，Σ' に関する成分を求めよ．

$$(T^{\kappa}_{\lambda}) = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 14. 問題 12 の空間と座標系 Σ, Σ' を考える．Σ に関して，重み -1 の反変ベクトル密度 a^{κ} と，重み 2 の共変擬ベクトル密度 b_{κ} の成分は，それぞれ $(a^1, a^2, a^3) = (2, 1, 2)$, $(b_1, b_2, b_3) = (2, 1, 2)$ であるとする．このとき，Σ' に関する成分をそれぞれ求めよ．

問題 15. 問題 12 の空間と座標系 Σ, Σ' を考える．問題 14 の a^{κ} と b_{κ} の縮約積 $a^{\kappa}b_{\kappa}$ は，座標変換にともないどのような変換をうける量か示せ．また，その縮約積 $a^{\kappa}b_{\kappa}$ の Σ' に関する成分を求めよ．

問題 16. 問題 12 の空間と座標系 Σ, Σ' を考える．さらに，空間には内積 $(\cdot, \cdot)$ が与えられ，Σ は直交座標系で $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交基底（$\|\boldsymbol{e}_{\kappa}\| = \sqrt{(\boldsymbol{e}_{\kappa}, \boldsymbol{e}_{\kappa})} = 1$ $(\kappa = 1, 2, 3)$, $(\boldsymbol{e}_{\kappa}, \boldsymbol{e}_{\lambda}) = 0$ $(\kappa \neq \lambda)$）であるとする．このとき，Σ' に関する計量テンソル $g_{\kappa'\lambda'} = (\boldsymbol{e}_{\kappa'}, \boldsymbol{e}_{\lambda'})$ の成分を求めよ．