基礎数理 基本演習 問題

<u>集合</u>

問題 1. $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \ldots, w_n$ が与えられているとする．S の部分集合 A に対して，$h(A) = \sum_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 h がモジュラ等式 $h(A) + h(B) = h(A \cup B) + h(A \cap B)$ を満たすことを示せ．

問題 2. $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \ldots, w_n$ が与えられているとする．S の部分集合 A に対して，$f(A) = \max_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 f が劣モジュラ不等式 $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$ を満たすことを示せ．

問題 3. 整数 a, b に対して $a - b$ が 6 の倍数のときに $a \sim b$ と定めることにより 2 項関係 $\sim$ を定義する．これが同値関係であることを証明せよ．

問題 4. 集合 $S = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ の上に 2 項関係 $\sim$ を「$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b$」で定義する．この 2 項関係 $\sim$ が同値関係であることを証明せよ．

問題 5. 行列の集合の上に,「$A \sim B \iff$ ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$」によって 2 項関係 $\sim$ を定義する．

（1）この 2 項関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ．

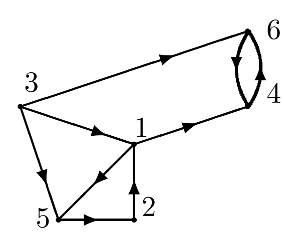
（2）通常の行列の加算（和）を用いて，同値類の間に加算を定義しようとしても上手くできないこと (well-defined でないこと) を説明せよ．

問題 6. 擬順序関係 $\preceq$ が与えられたとき，2 項関係 $\sim$ を「$a \sim b \iff a \preceq b$ かつ $b \preceq a$」によって定義する．

（1）$\sim$ は同値関係になることを示せ．

（2）その同値類 $C_1, C_2, \ldots$ に対し，2 項関係 $\leq$ を「$C_i \leq C_j \iff a \in C_i,\ b \in C_j$に対し $a \preceq b$」によって定義できること（well-defined であること）を示せ．

問題 7. 右図のグラフの強連結成分分解を求めよ．



位相

問題 8. 劣モジュラ集合関数 $\rho(X)$ の最小値を与える X の全体を $\mathcal{L}$ とすると，$\mathcal{L}$ は分配束を成すことを示せ．ただし，ρ が劣モジュラであるとは，任意の X, Y に対して，$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ が成り立つことをいう．

問題 9. 数列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が a に収束することの定義は，

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n_0 が存在して，$n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - a| \leq \varepsilon$ が成り立つ

である．ここで，n_0 は指定された ε に依存する自然数である．

（1）$a_n = 1/n^2$ は $a = 0$ に収束する．n_0 をどのように選べばよいか．

（2）$a_n = 1/\log n$ は $a = 0$ に収束する．n_0 をどのように選べばよいか．

（3）$a_n = 1$ (n が平方数のとき), $= 1/n^2$ (それ以外のとき) で定義される数列 (a_n) は $a = 0$ に収束するか，上の定義にあてはめて答えよ．ただし，平方数とは，ある整数の 2 乗になっている数 $(1, 4, 9, 16, \ldots)$ のことである．

問題 10. 収束列は有界列であることを証明せよ．

問題 11. 収束列はコーシー列であることを証明せよ．

問題 12. $a_n = 1/n^2$ で定義される数列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ がコーシー列であることを証明せよ．

問題 13. $a_n = \sum_{k=1}^{n} (1/k^2)$ で定義される数列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ がコーシー列であることを証明せよ．

問題 14. 有界数列 $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ の間の距離を $d(a, b) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n - b_n|$ と定義し，有界数列の全体を X と表す．(X, d) が距離空間となることを示せ．

問題 15. $n \in \mathbf{N}$ に対して，関数 $K_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$K_n(x) = \begin{cases} n(1 - n|x|) & (|x| \leq 1/n) \\ 0 & (|x| > 1/n) \end{cases}$$

と定義し，連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y) f(x + y) \mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbf{R})$$

と定義する．各 x に対して，$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束することを証明せよ．

問題 16. $n \in \mathbf{N}$ に対して，関数 $K_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $K_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{\pi}} \cdot \exp(-nx^2)$ と定義し，有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y) f(x + y) \mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbf{R})$$

と定義する．各 x に対して，$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束することを証明せよ．

行列

問題 17. 行列 A に対する以下の許容変換に関する標準形の形，および不変量を述べよ.

（1）SAT　（S, T は正則行列）

（2）$S^{-1}AS$　（S は正則行列）

（3）PAQ　（P, Q は直交行列）

問題 18. 対称行列 A に対する以下の許容変換に関する標準形の形，および不変量を述べよ.

（1）$Q^{\top}AQ$　（Q は直交行列）

（2）$S^{\top}AS$　（S は正則行列）

問題 19. 方程式 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$ が解 (x_1, x_2) をもつための a, b に関する (必要十分) 条件を求めよ.

問題 20. n 次三重対角行列

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(対角要素は最後だけ 1) の行列式の値を求めよ.

問題 21. 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を計算せよ.

問題 22. Hermite 対称行列の固有値は実数であることを証明せよ.

問題 23. 行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ.

問題 24. 行列 $\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が正定値となるための a, b に関する (必要十分) 条件を求めよ.