解析数理工学 基本演習 問題

問題 1. $[a,b]$ を実数の空間 $\mathbf{R}$ の閉区間とする $(-\infty < a < b < \infty)$. つぎに答えよ.

(a) 閉区間 $[a,b]$ の分割 Δ とは何か.

(b) 閉区間 $[a,b]$ の分割 Δ の分点とは何か.

(c) 閉区間 $[a,b]$ の分割 Δ の目あるいはメッシュとは何か.

(d) 閉区間 $[a,b]$ の二つの分割 Δ, Δ' に対し, Δ' が Δ の細分であるとは何か.

問題 2. 関数 f は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる関数とする. 関数 f がリーマン積分可能であることの定義を与えよ.

問題 3. 関数 f は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる任意の連続関数とする. 関数 f がリーマン積分可能であることを示せ.

問題 4. 関数 f は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる関数で, リーマン積分可能でない例を与えよ.

問題 5. 関数 f は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる関数で, リーマン積分可能であるとする. 関数 f は有界であることを示せ.

問題 6. 関数 f, g は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる任意の連続関数とする. つぎのことが成り立つことを示せ.

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d g(x)dx \qquad (a \le \forall c < \forall d \le b)$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(x) = g(x) \qquad (a \le \forall x \le b).$$

問題 7. 問題 6 において, 関数 f, g が必ずしも連続関数でないときは, 問題 6 の命題は成り立たないことがある. その例を与えよ.

問題 8. 関数 f は閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる関数で, リーマン積分可能であるとする. 閉区間 $[a,b]$ の有限個の閉部分区間 $[c,d]$ $(a \le c \le d \le b)$ の直和（互いに交わらない集合の和集合) の全体を $\mathcal{I}_1$ と置く:

$$\mathcal{I}_1 \equiv \{A = \cup_{j=1}^m [c_j, d_j]; a \le c_j \le d_j < c_{j+1} \le d_{j+1} \le b \ (1 \le j \le m-1)\}.$$

$\mathcal{I}_1$ から $[0,\infty)$ への関数（集合関数) μ_f を

$$\mu_f(A) \equiv \sum_{j=1}^m \int_{c_j}^{d_j} f(x)dx$$

で定義する; ただし

$$A = \cup_{j=1}^m [c_j, d_j].$$

次のことが成り立つことを示せ:

(1) $\lim_{j\to\infty}(d_j - c_j) = 0 \Longrightarrow \lim_{j\to\infty}\mu_f([c_j, d_j]) = 0$;

(2) $\mu_f([c, c]) = 0 \qquad (a \le \forall c \le b)$;

(3) $\mathcal{I}_1$ の 元 $A = \cup_{j=1}^m [c_j, d_j]$ $(-\infty < c_j \le d_j < c_{j+1} \le d_{j+1} \le b, 1 \le j \le m-1)$ に対して

$$\mu_f(A) = \sum_{j=1}^m \mu_f([c_j, d_j]).$$

(4) $\mathcal{I}_1$ の互いに交わらない集合 A_j $(1 \le j \le p)$ に対し

$$\mu_f(\cup_{j=1}^p A_j) = \sum_{j=1}^p \mu_f(A_j).$$

問題 9. 関数 f は閉区間 $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ の上で定義された実数の値をとる関数で, リーマン積分可能であるとする. 区間 $[a, b]$ の有限個の部分区間 $(c, d](a \le c \le d \le b)$ の直和（互いに交わらない集合の和集合) の全体を $\mathcal{I}_2$ と置く:

$$\mathcal{I}_2 \equiv \{A = \cup_{j=1}^m (c_j, d_j]; a \le c_j \le d_j \le c_{j+1} \le d_{j+1} \le b \ (1 \le j \le m-1)\}.$$

$\mathcal{I}_2$ から $[0, \infty)$ への関数（集合関数) ν_f を

$$\nu_f(A) \equiv \sum_{j=1}^m \int_{c_j}^{d_j} f(x)dx$$

で定義する; ただし

$$A = \cup_{j=1}^m (c_j, d_j].$$

次のことが成り立つことを示せ:

(1) $\nu_f((c, d]) = \mu_f([c, d]) \qquad (a \le \forall c \le \forall d \le b)$;

(2) $\nu_f(\emptyset) = 0$;

(3) $\mathcal{I}_2$ の 元 $A = \cup_{j=1}^m (a_j, b_j]$ $(a \le c_j \le d_j \le c_{j+1} \le d_{j+1} \le b, 1 \le j \le m-1)$ に対して

$$\nu_f(A) = \sum_{j=1}^m \nu_f((c_j, d_j]).$$

(4) $\mathcal{I}_2$ の互いに交わらない集合 A_j $(1 \le j \le p)$ に対し

$$\nu_f(A) = \sum_{j=1}^p \nu_f(A_j).$$

問題 10. $S=\{1,2,\ldots,N\}$ の部分集合の全体を 2^S と書く. 2^S から $\{0,1,\ldots,N\}$ への関数 (集合関数) n を

$$n(A)\equiv \text{集合 } A \text{ の要素の数} \qquad (A\in 2^S)$$

で定める. 次のことが成り立つことを示せ:

(1) $n(\emptyset)=0$;

(2) 2^S の p 個の元 $A_j(1\leq j\leq p)$ が互いに交わらないとき

$$n(\cup_{j=1}^p A_j)=\sum_{j=1}^p n(A_j).$$

問題 11 問題 10 において, (1) と (2) より, つぎの不等式 (3),(4) が成り立つことを示せ.

(3) $A\subset B$ ならば, $n(A)\leq n(B)$;

(4) 2^S の任意の p 個の元 $A_j(1\leq j\leq p)$ に対し

$$n(\cup_{j=1}^p A_j)\leq\sum_{j=1}^p n(A_j).$$

問題 12. $S=\mathbf{N}$ の有限部分集合の全体を $\mathcal{F}$ と置く. $\mathcal{F}$ から $\{0,1,2,\ldots\}\equiv\mathbf{N}^*$ への関数 (集合関数) n を

$$n(A)\equiv \text{集合 } A \text{ の要素の数} \qquad (A\in \mathcal{F})$$

で定義する. 次のことが成り立つことを示せ:

(1) $n(\emptyset)=0$;

(2) $\mathcal{F}$ の p 個の元 $A_j(1\leq j\leq p)$ が互いに交わらないとき

$$n(\cup_{j=1}^p A_j)=\sum_{j=1}^p n(A_j).$$

問題 13. 問題 12 において, (1) と (2) より, つぎの不等式 (3),(4) が成り立つことを示せ.

(3) $A\subset B$ ならば, $n(A)\leq n(B)$;

(4) $\mathcal{F}$ の任意の p 個の元 $A_j(1\leq j\leq p)$ に対し

$$n(\cup_{j=1}^p A_j)\leq\sum_{j=1}^p n(A_j).$$

問題 14. $S=\mathbf{N}$ の部分集合 A で有限集合でない集合, 即ち, $\mathcal{F}^c\equiv\{A\in 2^S; A\notin\mathcal{F}\}$ の元に対して, その要素の数は無限大であるが, それを

$$n(A)\equiv\infty \qquad (A\in\mathcal{F})$$

と書き, 実数の集合 $\mathbf{R}$ に新しい点 ∞ を付け加える. このとき, 2^S から $\mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ への関数（集合関数）n を

$$n(A) \equiv \text{集合 } A \text{ の要素の数} \qquad (A \in 2^S)$$

で定義する. 次のことが成り立つことを示せ:

(1) $n(\emptyset) = 0$;

(2) 2^S の p 個の元 $A_j (1 \le j \le p)$ が互いに交わらないとき

$$n(\cup_{j=1}^p A_j) = \sum_{j=1}^p n(A_j);$$

(2)' 2^S の可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ が互いに交わらないとき

$$n(\cup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty n(A_j).$$

問題 15. 問題 14 において, (2) は (1) と (2)' より導かれることを示せ.

問題 16. 問題 14 において, (1) と (2)' より, つぎの不等式 (3),(4) が成り立つことを示せ.

(3) $A \subset B$ ならば, $n(A) \le n(B)$;

(4) 2^S の任意の可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ に対し

$$n(\cup_{j=1}^\infty A_j) \le \sum_{j=1}^\infty n(A_j).$$

問題 17. 問題 14 において, つぎの極限定理が成り立つことを示せ.

2^S の可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ で $A_j \subset A_{j+1}$ ならば

$$n(A_p) \nearrow_p n(\cup_{j=1}^\infty A_j).$$

問題 18. 問題 14 において, つぎの極限定理が成り立つことを示せ.

2^S の可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ で $A_j \supset A_{j+1}$ で, さらにある自然数 n_0 が存在して $A_{n_0} \in \mathcal{F}$ ならば

$$n(A_p) \searrow_p n(\cap_{j=1}^\infty A_j).$$

問題 19. 問題 18 において, 条件「ある自然数 n_0 が存在して $A_{n_0} \in \mathcal{F}$」が成り立たないとき, 問題 18 にある極限定理が成り立たないことを例を挙げてを示せ.

問題 20. S を任意の集合とし, その部分集合の全体を 2^S と書く. S の任意の元 a に対し, 2^S から $\{0, 1\}$ への関数（集合関数）δ_a を

$$\delta_a(A) \equiv \begin{cases} 1 & (a \in A) \\ 0 & (a \notin A) \end{cases}$$

と定義する． 次のことが成り立つことを示せ:

(1) $\delta_a(\emptyset) = 0$;

(2) 2^S の p 個の元 $A_j (1 \le j \le p)$ が互いに交わらないとき

$$\delta_a(\cup_{j=1}^{p} A_j) = \sum_{j=1}^{p} \delta_a(A_j);$$

(2)' 2^S の 可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ が互いに交わらないとき

$$\delta_a(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_a(A_j);$$

(3) $A \subset B$ ならば, $\delta_a(A) \le \delta_a(B)$;

(4) $\delta_a(S) = 1$.

問題 21. 問題 20 において, (2) は (2)' と (1) より導かれることを示せ.

問題 22. S を任意の集合とし, S の任意の有限個の元 a_k $(1 \le k \le m)$ に対し, 2^S から $\{0, 1\}$ への関数（集合関数) μ を

$$\mu \equiv \sum_{k=1}^{m} c_k \delta_{a_k}$$

と定義する. ここで, c_k は正数である $(1 \le k \le m)$. 次のことが成り立つことを示せ:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) 2^S の p 個の元 $A_j (1 \le j \le p)$ が互いに交わらないとき

$$\mu(\cup_{j=1}^{p} A_j) = \sum_{j=1}^{p} \mu(A_j);$$

(2)' 2^S の 可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ が互いに交わらないとき

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(3) $A \subset B$ ならば, $\mu(A) \le \mu(B)$.

(4) 2^S の任意の可算個の元 $A_j (j = 1, 2, \ldots)$ に対し

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j);$$

問題 23. S を任意の集合とし, その部分集合の全体を 2^S と書く. 2^S の任意の元 A に対し, S から $\{0,1\}$ への関数 χ_A を

$$\chi_A(x) \equiv \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

と定義する. 次のことが成り立つことを示せ;

(1) $\chi_A(x) = \delta_x(A) \qquad (x \in S, A \in 2^S)$;

(2) $A = \{x \in S; \chi_A(x) = 1\} \qquad (A \in 2^S)$.

問題 24. S を任意の集合とする. 2^S の元の任意の列 $(A_n; n \in \mathbf{N})$ を考える. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し, 2^S の元 $\underline{A}_n$ と $\overline{A}_n$ を

$$\begin{aligned} \underline{A}_n &\equiv \cap_{k=n}^{\infty} A_k \\ \overline{A}_n &\equiv \cup_{k=n}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

で定義する. つぎのことが成り立つことを示せ:

(1) $\underline{A}_n \subset A_n \subset \overline{A}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$;

(2) $\underline{A}_n \subset \underline{A}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$;

(3) $\overline{A}_n \supset \overline{A}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$.

問題 25. 問題 24 の続きとして, さらに, 2^S の元 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ と $\limsup_{n\to\infty} A_n$ を

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} A_n &\equiv \cup_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \\ \limsup_{n\to\infty} A_n &\equiv \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \end{aligned}$$

で定義する. つぎのことが成り立つことを示せ:

(1) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$;

(2) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in S;$ ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して,
$n \geq n_0$ なるすべての自然数 n に対し, $x \in A_n\}$

(3) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in S;$ 無限に多くの自然数 n_k $(n_k < n_{k+1}, k \in \mathbf{N})$
が存在して, すべての自然数 k に対し, $x \in A_{n_k}\}$.

(4) $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$;

(5) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$.

[**定義**] 上式 (1) の包含関係で等号が成り立つとき, 即ち,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

が成り立つとき, 集合列 $(A_n; n \in \mathbf{N})$ は収束するといい, その極限集合 $\lim_{n\to\infty} A_n$ を

$$\lim_{n\to\infty} A_n \equiv \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

で定義する.

問題 26. 任意の実数列 $(a_n; n \in \mathbf{N})$ を考える．各 $n \in \mathbf{N}$ に対し，$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ の元 $\underline{a}_n$ と $\overline{a}_n$ を

$$\begin{aligned} \underline{a}_n &\equiv \inf_{k \geq n} a_k \\ \overline{a}_n &\equiv \sup_{k \geq n} a_k \end{aligned}$$

で定義する．つぎのことが成り立つことを示せ:

(1) $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \qquad (n \in \mathbf{N})$;

(2) $\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$;

(3) $\overline{a}_n \geq \overline{a}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$.

問題 27. 問題 26 の続きとして，さらに，$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ の元 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ と $\limsup_{n\to\infty} a_n$ を

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &\equiv \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &\equiv \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \end{aligned}$$

で定義する．つぎのことが成り立つことを示せ:

(4) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

[**定義**]　上式 (4) の包含関係で等号が成り立つとき，即ち，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つとき，実数列 $(a_n; n \in \mathbf{N})$ は収束するといい，その極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を

$$\lim_{n\to\infty} a_n \equiv \lim \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

で定義する．