算法数理工学 基本演習 問題

問題 1. $c > 1, p > 0$ を満たす任意の実数 c, p に対して次の式が成り立つことを示せ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n^p} = \infty.$$

問題 2. $c > 1, p > 0$ を満たす任意の実数 c, p に対して次の式が成り立つことを示せ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\log_c n} = \infty.$$

問題 3. $c > 0$ を満たす任意の実数 c に対して，次の式が成り立つことを示せ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{c^n} = \infty.$$

問題 4. $f(n)$ と $p(n)$ を自然数の上で定義された二つの正値関数とする．任意の自然数 n に対して

$$\frac{f(n)}{p(n)} < C$$

を満たす定数 C (C は n によらない) が存在するとき，

$$f(n) = \mathrm{O}(p(n))$$

と書いて，「$f(n)$ は $p(n)$ の**オーダ**である」という．次の (1), (2), $\cdots$, (6) が正しいか否かを理由とともに答えよ．

(1) $3n^2 + 5n + 6 = \mathrm{O}(n^2)$

(2) $3n^2 + 5n + 6 = \mathrm{O}(n^3)$

(3) $3n^2 + 5n + 6 = \mathrm{O}(n\sqrt{n})$

(4) $2^n + 10n^3 = \mathrm{O}(n^3)$

(5) $n^2 + n\log n = \mathrm{O}(n \log n)$

(6) $n\sqrt{n} + n(\log n)^2 = \mathrm{O}(n(\log n)^2)$

問題 5. ある定数 $a > 1$ に対して

$$f(n) = \mathrm{O}(\log_a n)$$

であるとき，任意の定数 $b > 1$ に対しても

$$f(n) = \mathrm{O}(\log_b n)$$

であることを示せ．

問題 6. $f(n) = \mathrm{O}(p(n))$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{f(n)}{p(n)} \neq 0$$

のとき，$p(n)$ は $f(n)$ の**忠実なオーダ**であるという．次の (1), (2), $\cdots$, (5) の関数に対して，忠実で最も簡単な式 $p(n)$ を用いてそのオーダを示せ．

(1) $2.3n^3 + 1.6n^2 + 3$

(2) $3n^2 + 2.6n\sqrt{n}\log n$

(3) $n\log n + \sqrt{n}(\log n)^3$

(4) $3n^2 + 2^n$

(5) $3\log n + 2(\log\log n)^3$

問題 7. 漸化式

$$\begin{cases} f(1) = f(2) = 1, \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

で定義される自然数上の関数 $f(n)$ を，n の関数で表せ．

問題 8. 頂点集合 V と辺集合 E からなる連結グラフ $G = (V, E)$ は，サイクルをもたないとき**木**とよばれる．木 G において，特に**根**とよばれる一つの頂点 $v_0 \in V$ が指定されているとき，G は v_0 を根とする**根つき木**とよばれる．根つき木 G の任意の頂点 v に対して，根 v_0 から v へ到る道を構成する辺の数を v の**高さ**といい，G の頂点の高さの最大値を G の高さという．高さ k の頂点 v と隣接する頂点で，高さが $k-1$ のものを v の**親**とよび，高さが $k+1$ のものを v の**子**という．根つき木 G のどの頂点も子を高々2 個しかもたないとき，G を **2 進木**という．

n 個の頂点からなる 2 進木の高さの最小値を求めよ．

問題 9. 地面に 3 本の柱 A, B, C が立っている．そして，柱 A には，中央に穴のあいた n 枚の円盤が差し込んである．ただし，円盤は互いに大きさが異なり，大きい円盤が下になるように重ねてある．この状態から出発して，すべての円盤を柱 C へ移したい．ただし，次の (i), (ii), (iii) を満たす操作のみが許されるものとする．

(i) 一度に 1 枚の円盤しか動かせない．

(ii) 柱から取り出した円盤は，必ず A, B, C の柱のいずれかへ差し込まなければならない．

(iii) 小さい円盤の上に大きい円盤を重ねてはいけない．

この問題は次の手続き MOVE(n, A, B, C) によって解くことができる．

手続き MOVE(n, A, B, C):

if $n = 1$ **then** move the disk from A to C **else**

begin

MOVE($n-1$, A, C, B);

move the largest disk from A to C;

MOVE($n-1$, B, A, C);

end

この手続きの時間複雑度を求めよ．(この問題はハノイの塔の問題とよばれている．)

問題 10. 次のアルゴリズムの時間複雑度 (計算時間のオーダ) を求めよ．

begin

for $1 \leq i < j \leq n$ **do** $d^0(i,j) \leftarrow l(i,j)$;

for $k \leftarrow 1$ **until** n **do**

  for $1 \leq i < j \leq n$ **do**

    $d^k(i,j) \leftarrow \min\{d^{k-1}(i,j), d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)\}$

end

(これは，1 から n までの通し番号のついた n 個の点に対して 2 点 i,j の距離が $l(i,j)$ で与えられているとき，任意の点対 (i,j) の最短路の長さ $d^n(i,j)$ を求めるアルゴリズムで，フロイド (Floyd) の方法とよばれている．アルゴリズム中の $\alpha^k(i,j)$ は,「途中で経由できる頂点は $1,2,\cdots,k$ のみである」という条件のもとでの i と j をつなぐ最短路の長さである．)

問題 11. c を正定数とし，$f(n)$ を次の漸化式で定義される関数とする．

$$f(n) = \begin{cases} c & (n = 1), \\ 2f\left(\dfrac{n}{2}\right) + cn & (n \geq 2). \end{cases}$$

n がある自然数 k に対して $n = 2^k$ を満たすとき，$f(n)$ を求めよ．

問題 12. 正方行列 A の n 乗を $F(n) = A^n$ とおく．n が偶数なら $F(n) = F\left(\dfrac{n}{2}\right) \times F\left(\dfrac{n}{2}\right)$ が成り立ち，n が奇数なら $F(n) = F\left(\dfrac{n-1}{2}\right) \times F\left(\dfrac{n-1}{2}\right) \times A$ が成り立つ．これを利用して，$F(n)$ を計算するための $\mathrm{O}(\log n)$ のアルゴリズムを構成せよ．ただし，行列の掛け算 1 回は定数時間で実行できるものとする．

問題 13. $s_1, s_2, \cdots, s_k$ は正の定数で $s_1 + s_2 + \cdots + s_k < 1$ を満たすとする．さらに c, n_0 を正定数とする．関数 $f(n)$ が,

$$f(n) = \begin{cases} c & (n \leq n_0 \text{ のとき}), \\ f(s_1 n) + f(s_2 n) + \cdots + f(s_k n) + cn & (n_0 < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義されているとする．このとき,

$$f(n) \leq \frac{cn}{1 - (s_1 + s_2 + \cdots + s_k)}$$

が満たされることを示せ．

問題 14. 平面上に指定された n 個の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ がこの順に反時計回りに凸多角形 A の頂点をなすとする．この凸多角形をはさむ 2 本の平行線の距離の最小値を求めたい．この問題を解くための，時間複雑度が $\mathrm{O}(n)$ のアルゴリズムを構成せよ．

問題 15. 平面上に指定された n 個の点の凸包 (それら n 個の点を含む最小の凸図形) を作るために次の三つの方針を考えた．それぞれの方針に従ったアルゴリズムの計算量を評価し，優劣を論ぜよ．

方針 1.　平面を木の板で作り，指定された点の位置に釘を打つ．そして，x 座標値が最大の釘に十分長い糸の端を結び付け，その糸のもう一方の端を持って，釘を打った領域の周りを回す．糸が釘に引っかかつてできる形が，求める凸包である．(もちろん，コンピュータでロボットを制御してこの作業を行わせようというわけではない．これと等価なことを計算で行うのである．)

方針 2.　n 個の点をほぼ同数の二つのグループに分割し，それぞれの凸包を求め，その結果を統合するということを，再帰的に繰り返す．

方針 3.　座標系の原点が凸包の中に含まれるように座標変換をしたあと，n 個の点を極座標表示し，偏角の小さい順に並べる．次に，その順に点を辿って (必要なら後戻りもして) 凸包の境界上にはない点を除いていく．