確率数理工学 基本演習 問題

問題 1. ゆがみのないサイコロを 6 回ふった時に，1 の目が 2 回出る確率を求めよ．

問題 2. ゆがみのないサイコロをふって，6 回目に初めて 1 の目が出る確率を求めよ

問題 3. ゆがみのないサイコロを 6 回ふった時に，1 の目が 1 回かつ 4 以上の目が 2 回出る確率を求めよ．

問題 4. 確率的に起こることがら (例えば「サイコロをふって 1 の目が出る」) を「事象」とよぶ．事象 A の確率を $P(A)$ と表す．二つの事象 A, B について，$A \cup B$ を A と B の少くとも一方が起こる事象，$A \cap B$ を A と B の両方共起こる事象と定義する．ベン図を用いて

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

を示せ．またこの関係式を 3 個の事象 $P(A \cup B \cup C)$ の場合に拡張せよ．

問題 5. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ を総和記号 $\sum$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

のように表す．ここで i は添字であり $\sum$ の上下に添字の範囲が示している．添字の範囲の表示の仕方は場面によりさまざまである．1) $\sum_{1 \le i \le n} x_i$, 2) $\sum_{m}^{n} x_i$, 3) $\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$, のそれぞれが何を表すか説明せよ．

問題 6. 等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i \ne j} x_i x_j$$

を説明せよ．$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^3$ を同様のやりかたで表してみよ．

問題 7. $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ を所与の二つの数列として，b を実数とする時

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b x_i)^2$$

を最小にする b の値とその時の $Q(b)$ の最小値を求めよ．

問題 8. 前問を用いて，コーシー・シュワルツ不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

を証明し，等号条件を与えよ．

問題 9. $a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ とおき，数列 a_n が収束する時，その極限を $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ と書く．またこの時「級数が収束する」という．c を実数として $\sum_{i=1}^{\infty} c^i$ が収束する c の範囲と極限の簡潔な表示を求めよ．同様に $\sum_{i=1}^{\infty} i \times c^{i-1}$ が収束する c の範囲と極限の簡潔な表示を求めよ．

問題 10. i 円を確率 $p(i)$ でもらえるような賭 X の期待値を

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \times p(i)$$

と定義する．サイコロを投げて奇数が出たら 0，6 が出たら 10 円，6 以外の偶数が出たらその値をもらえるような賭 X の期待値を求めよ．(賭のように確率的にいろいろな値をとる変数を確率変数とよぶ．サイコロのようにとびとびの値しかとらない確率変数を離散確率変数とよぶ．)

問題 11. ゆがみのないサイコロをふってはじめて 6 の目がでるまでの回数の期待値を求めよ

問題 12. (やや難) ゆがみのないコインをなげて，はじめて表が 2 回続けて出るまでのコインをなげるときの回数の期待値を求めよ．

問題 13. 0 と 1 の間の実数を無作為に選んで得られる確率変数を X とおく．この X を 0 と 1 の間の一様乱数とよぶ．(一様乱数のように連続的な値をとる確率変数を連続確率変数とよぶ．) 一様乱数 X を 0.1 単位，あるいは 0.01 単位に切り下げて近似することにより，X の期待値を

$$E(X) = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

と定義することが合理的であることを説明せよ．

問題 14. n 個の数 $x_1, \ldots, x_n$ の (算術) 平均を $\bar{x}_n$ を

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

と表す．また n 個の数 $x_1, \ldots, x_n$ の分散を

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$$

と定義する．

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}_n^2$$

を示せ．

問題 15. i 円を確率 $p(i)$ 円でもらえるような賭を X とし，$h(x)$ を実数値関数とする時，$h(X)$ は $h(i)$ 円を確率 $p(i)$ でもらえるような賭を表している．$h(X)$ の期待値を

$$E(h(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \times p(i)$$

と表す．X をゆがみのサイコロをふった時の目として $E(X^2)$ を求めよ．

問題 16. X を確率変数としその期待値を $\mu = E(X)$ とおく．また $E[(X-\mu)^2]$ を X の分散とよぶ．

$$E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

を示せ．

問題 17. 2 個の離散確率変数 X, Y を同時に考え，X が i かつ Y が j となる確率を $p(i,j)$ と表す．$h(x,y)$ を x, y の実数値関数とし，$h(X,Y)$ の期待値を

$$E[h(X,Y)] = \sum_{i,j} h(i,j)p(i,j)$$

と定義する．X, Y が連続な場合には積分を和で近似することによって定義する．

ゆがみのないサイコロを 2 回投げた時の目をそれぞれ X, Y とする．$P(|X-Y| \geq 3)$ を求めよ．また $E(|X-Y|)$ を求めよ．

問題 18. 0 と 1 の間の実数を 2 回無作為に選んだ結果を X, Y とする．$P(|X-Y| \geq 1/2)$ を求めよ．また $E(|X-Y|)$ を求めよ．

問題 19. (やや難) xy 平面の単位円の内部 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ から無作為に点 (X,Y) を選ぶ時 $E(X^2+Y^2)$ を求めよ．

問題 20. (やや難) xy 平面の単位円の内部 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ から無作為に 2 点 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) を選ぶ時の 2 点間の距離の 2 乗の期待値を求めよ．