認識行動システムの基礎 演習略解

(1) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおけば，$A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

$\therefore \quad A^T A = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

次も同様.

(2) 略.

(3) (a) 1 (b) 3 (c) 3

(4) $v_1^T v_3 = 0$，$v_2^T v_3 = 0$.

(5) 零空間の基底は $(2,2,-1)$．$(3,3,3) = (1,1,4) + (2,2,-1) = x_r + x_n$.

(6) $\bar{x} = 2$.

(7) 固有値 λ と固有ベクトル $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ は α，β を定数として次のようになる.

(a) $\lambda_1 = 7$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ と $\lambda_2 = -6$, $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 3$, $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と $\lambda_2 = 3$, $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\lambda = 2$，すべての 0 でないベクトル.

(8) (a) $A^+ = \dfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A^+ = \dfrac{1}{75} \begin{bmatrix} -8 & 17 \\ -5 & 20 \\ 31 & -19 \end{bmatrix}$

(9) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ として求めると,

$\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 3 \\ 0.8 \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_3 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

(c) $A^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(10) (a) $(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) = (3, 1, \sqrt{3}, 1)$

(b) $V_r = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} (= V)$ (c) $U_r = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(d) $U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$$

(11) 基本的に (10) と同様に考えるが，$m < n$ なので，AA^T の固有値，固有ベクトルを求める（この固有ベクトルが U_r の列ベクトルとなる）．

$(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) = \left(9, 3, 3, \sqrt{3}\right)$

$U_r = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} (= U) \qquad V_r = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$

$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$$

この結果をもとに疑似逆行列 $A^+ = V\Sigma^+U^T$ を求めると，

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) (a) 数学の平均 $= 4.2$，英語の平均 $= 3.8$

(b) 数学の分散 $= 4.76$，英語の分散 $= 1.56$

(c) 共分散 $= 1.64$

(13) (a) 固有値 $= 5.45$ のとき，固有ベクトル $= (0.9217, 0.3878)$

固有値 $= 0.87$ のとき，固有ベクトル $= (0.3884, -0.9215)$

(b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
総合成績	8	10	9	7	4	6	1	3	2	5
文系度	5	1	8	9	6	4	7	10	3	2
理系度	6	10	3	2	5	7	4	1	8	9

(14) $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 + L_2C_{12} + L_3C_{123} \\ L_1S_1 + L_2S_{12} + L_3S_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -(L_1S_1 + L_2S_{12} + L_3S_{123}) & -(L_2S_{12} + L_3S_{123}) & -L_3S_{123} \\ L_1C_1 + L_2C_{12} + L_3C_{123} & L_2C_{12} + L_3C_{123} & L_3C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ただし，$S_1 = \sin\theta_1, C_1 = \cos\theta_1, S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ とする．

(15) $P(X, Y, Z) = \left(\frac{b(x_l + x_r)}{2(x_l - x_r)}, \frac{by}{x_l - x_r}, \frac{bf}{x_l - x_r} \right)$ ただし，$y = y_l = y_r$.