認識行動システムの基礎 演習問題

(1) $A^TA = AA^T = I$ であるような $n \times n$ の正方行列 A を n 次の直交行列という．次の行列はともに直交行列であることを示せ．

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

(2) R を 2 次元の回転行列

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とするとき，$R^{-1} = R^T$ を確かめよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) 次のベクトルのうち，どの 2 つが直交しているか確かめよ．

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 次の行列の零空間の基底を求め，行空間に直交していることを確かめよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

また，ベクトル $x = (3, 3, 3)$ を行空間の成分 x_r と零空間の成分 x_n に分解せよ．

(6) $3x = 10$，$4x = 5$ に対する最小 2 乗解 $\bar{x}$ を求めよ．

(7) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(8) 次の行列 A の疑似逆行列 A^+ を求めよ．

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(9) 次の A 行列に対し疑似逆行列 A^+ と $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の最小 2 乗解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) $i = 1, 2, 3$ に対して $\boldsymbol{y}_i$ の直交分解を $\boldsymbol{y}_i = \bar{\boldsymbol{y}}_i + \boldsymbol{r}$ (ただし，$\bar{\boldsymbol{y}}_i \in \mathrm{Im}A, \boldsymbol{r} \in \mathrm{Ker}A^T$ である) とする．このとき，$\bar{\boldsymbol{y}}_i = A\bar{\boldsymbol{x}}_i$ を満たす $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ を求めよ．ただし，$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \mathrm{Im}A^T$ である．

(b) A^+ を求めよ．ただし，$\bar{\boldsymbol{x}}_i = A^+\boldsymbol{y}_i$ である．

(10) 次の行列の特異値分解を求めるために以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) A^TA の固有値 λ_i と，特異値 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ を求めよ．

(b) λ_i に対する固有ベクトルを列ベクトルにもつ V_r を求めよ．

(c) $U_r = AV_r\Sigma_r^{-1}$ を求めよ．ただし，Σ_r は特異値のうち 0 でないものから構成した対角行列であり，

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \sigma_r \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \sigma_r \\ \hline & \boldsymbol{0} & \end{array}\right]$$

である．

(d) U, V はともに直交行列であり，$UU^T = U^TU = I_m, VV^T = V^TV = I_n$ が成り立つ．U, V を求め，A の特異値分解 $A = U\Sigma V^T$ を確認せよ．

(11) 次の行列 A の特異値分解 $A = U\Sigma V^T$ を求め，その結果をもとに疑似逆行列 $A^+ = V\Sigma^+U^T$ を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) 表は数学と英語のテストを行ったときの受験生 A～J の結果である．以下の問いに答えよ．

(a) 数学と英語のテストのそれぞれの平均を求めよ．

(b) 分散を求めよ．

(c) 共分散を求めよ．

(13) (12) のテスト結果について以下の問いに答えよ．

表 1: テスト結果

科目	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
数学	2	1	2	3	5	4	8	6	7	4
英語	3	4	2	2	4	4	5	3	6	5

(a) 分散・共分散行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(b) 主成分分析により，総合成績と文理度の順位をつけよ．

(14) 図 1 に示す xy 平面内を動く 3 関節ロボットアームについて以下の問いに答えよ．

(a) 関節変位ベクトル $\boldsymbol{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ を与えたときの手先の位置姿勢ベクトル $\boldsymbol{r} = [x, y, \theta]^T$ を求めよ．ただし，θ はリンク 3 と x 軸とのなす角度である．

(b) 手先の位置姿勢ベクトル $\boldsymbol{r} = [x, y, \theta]^T$ と関節変位ベクトル $\boldsymbol{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ の関係式から，ロボットアームのヤコビ行列を求めよ．

ヒント）
手先の位置姿勢ベクトル $\boldsymbol{r} = [r_1, r_2, \cdots, r_m]^T$ と関節変位ベクトル $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^T$ の関係式を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = [f_1(\boldsymbol{q}), f_2(\boldsymbol{q}), \cdots, f_m(\boldsymbol{q})]^T$ とすると，

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{J}$ をヤコビ行列という．このとき，手先の位置姿勢の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ と関節速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ との関係は $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$ で表される．

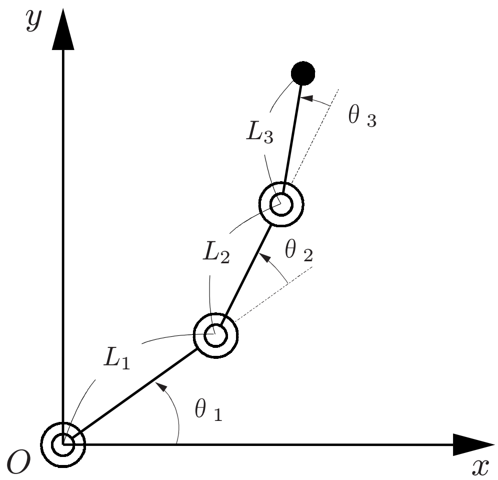

図 1: 3 関節ロボットアーム

(15) 図 2 は，物体の 3 次元位置計測に用いられるステレオカメラの基礎的なカメラ配置である平行ステレオの座標系を示している．左右のカメラで捉えた物体の画像上のそれぞれの点 $p_l(x_l, y_l), p_r(x_r, y_r)$ から，物体の 3 次元位置 $P(X, Y, Z)$ を求めよ．

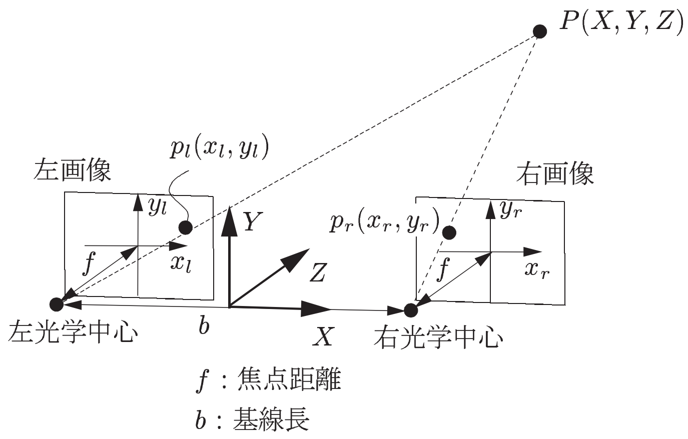

図 2: 平行ステレオ

ヒント）透視投影変換の式

$$
s \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}
$$