認識行動システム第一 演習問題解答

(1) $[0, 0, -1]$

(2) $[0, 0, 1]$

(3) $[0, 0, -1]$

(4)

リンク番号	リンク長 (a_{i-1})	リンクねじれ量 (α_{i-1})	リンクオフセット (d_i)	関節角 (θ_i)
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

(5)

$$
{}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}{}^1_2\mathbf{T}{}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_{123} & -s\theta_{123} & 0 & L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} \\ s\theta_{123} & c\theta_{123} & 0 & L_1s\theta_1 + L_2s\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(6)

$$
{}^0\mathbf{p} = {}^0_3\mathbf{T}{}^3\mathbf{p} = {}^0_3\mathbf{T}^3 \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} + L_3c\theta_{123} \\ L_1s\theta_1 + L_2s\theta_{12} + L_3s\theta_{123} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
(x, y) = (L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} + L_3c\theta_{123}, L_1s\theta_1 + L_2s\theta_{12} + L_3s\theta_{123})
$$

(7) $\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -L_1s\theta_1 - L_2s\theta_{12} - L_3s\theta_{123}$ 等より

$$
\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -L_1s\theta_1 - L_2s\theta_{12} - L_3s\theta_{123} & -L_2s\theta_{12} - L_3s\theta_{123} & -L_3s\theta_{123} \\ L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} + L_3c\theta_{123} & L_2c\theta_{12} + L_3c\theta_{123} & L_3c\theta_{123} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}
$$

(8) 角度を代入して、それぞれ

(i) $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 \\ -1-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

状況を図 1 に示す.

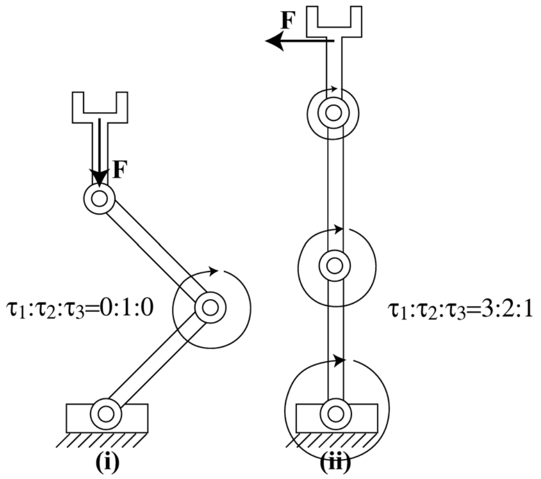

図 1: 3 リンクアームの姿勢と外力、および平衡を保つために必要なトルク

(9)

$$I_{xx} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2+z^2)\rho dxdydz = m\frac{b^2+c^2}{3}$$

ただし $m = \rho abc$ は総質量. 同様にして

$$\mathbf{I} = m \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}$$

(10) まず直接計算によって求める.

$$^C I_{xx} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (y^2+z^2)\rho dxdydz = m\frac{b^2+c^2}{12}$$

$$^C I_{xy} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} xy\rho dxdydz = 0$$

同様にして

$$^{\mathbf{C}}\mathbf{I} = m \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{12} \end{bmatrix}$$

次に前問の結果と平衡軸の定理から求める.

$$^C I_{xx} = {}^A I_{xx} - m(x_c^2 + y_c^2) = m\frac{b^2+c^2}{3} - m\frac{b^2+c^2}{4} = m\frac{b^2+c^2}{12}$$

他の要素も同様.

(11) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \sum_i x_i^2$、$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right]^{\mathrm{T}}$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_i x_i^2, \frac{\partial}{\partial x_2}\sum_i x_i^2, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}\sum_i x_i^2\right]^{\mathrm{T}} \\ &= [2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_N]^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{x}\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} a_{ji} y_j x_i \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{N} a_{j1} y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{N} a_{jM} y_j \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\end{aligned}$$

(13) ラグランジュの未定乗数法を用いる.

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\lambda = 0 \\ \therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{2}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \\ \therefore \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\lambda \\ \lambda &= 2(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{y} \\ \therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{2}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\lambda = \underline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{y}} \end{aligned}$$

(14)

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって最小ノルム解は $(x_1, x_2) = (2/5, 1/5)$ である．これは図 2 のように $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を x_1、x_2 平面上の直線と捉えたとき、原点最近傍の点として理解される.

(15)

$$\begin{aligned} e &= \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}})(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}} &= 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0 \\ \therefore \mathbf{x} &= \underline{(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}} \end{aligned}$$

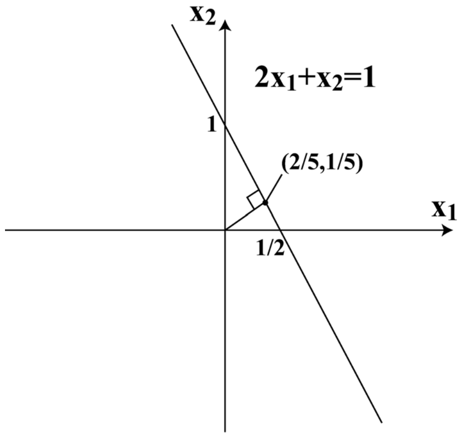

図 2: 最小ノルム解の幾何学的解釈

(16) $\mathbf{A}$ をエルミート行列、λ_0 を固有値、$\mathbf{x_0}$ を対応する固有ベクトルとする．$\mathbf{x}_0$ と $\mathbf{Ax_0}$ の複素内積を計算する

$$\mathbf{x}_0^*(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) \;=\; \mathbf{x}_0^*\lambda_0\mathbf{x}_0 = \lambda_0\mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_0$$

ただし * は複素共役を表す.

一方エルミート行列の定義より $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ だから

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^*(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) &= (\mathbf{A}^*\mathbf{x}_0)^*\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}\mathbf{x}_0)^*\mathbf{x}_0 = (\lambda_0\mathbf{x}_0)^*\mathbf{x}_0 = \lambda_0^*\mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_0 \\ \therefore\lambda_0 &= \lambda_0^* \end{aligned}$$

(17) $\mathbf{A}$ をエルミート行列、λ_0、λ_1 を固有値、$\mathbf{x_0}$、$\mathbf{x_1}$ を対応する固有ベクトルとする．$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{Ax_0}$ の複素内積を計算する

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^*\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= (\mathbf{x}_1^*\mathbf{A})\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^*\mathbf{x}_1)^*\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}\mathbf{x}_1)^*\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*(\mathbf{A}\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_0^*\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1^*\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= \lambda_0\mathbf{x}_1^*\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^*\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1\mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_1 \\ \therefore\lambda_0\mathbf{x}_1^*\mathbf{x}_0 &= \lambda_1\mathbf{x}_0^*\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_1 &= 0 \quad (\because \lambda_0 \neq \lambda_1) \end{aligned}$$

(18) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$ より $\lambda = 0, 2, 3$．固有ベクトルは長さを 1 に正規化してそれぞれ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{\mathrm{T}}$、$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{\mathrm{T}}$、$[0,1,0]^{\mathrm{T}}$．これらを並べれば対角化行列として直交行列を得る（∵エルミート行列の固有ベクトルは直交）.

$$\mathbf{L} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

(19) λ_0 を固有値、$\mathbf{x_0}$ を対応する固有ベクトルとする.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0^*\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0^*\lambda\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_0 \geq 0 \quad (\because \text{半正定の定義より}) \\
\therefore \lambda &\geq 0 \quad (\because \mathbf{x}_0^*\mathbf{x}_0 \geq 0)
\end{aligned}
$$