認識行動システム第一 演習問題

(1) 3 次元ベクトル [1, 0, 0] を、世界に固定された座標系の x，y，z 軸周りにこの順番で 90 度ずつ回転させたベクトルを求めよ．

(2) 3 次元ベクトル [1, 0, 0] を、世界に固定された座標系の z，y，x 軸周りにこの順番で 90 度ずつ回転させたベクトルを求めよ．

(3) 3 次元ベクトル [1, 0, 0] を、共に回転する座標系の z，y，x 軸周りにこの順番で 90 度ずつ回転させたベクトルを求めよ．

(4) 図 1 の 3 リンクアームに関して、各リンクのリンクパラメータを求めよ

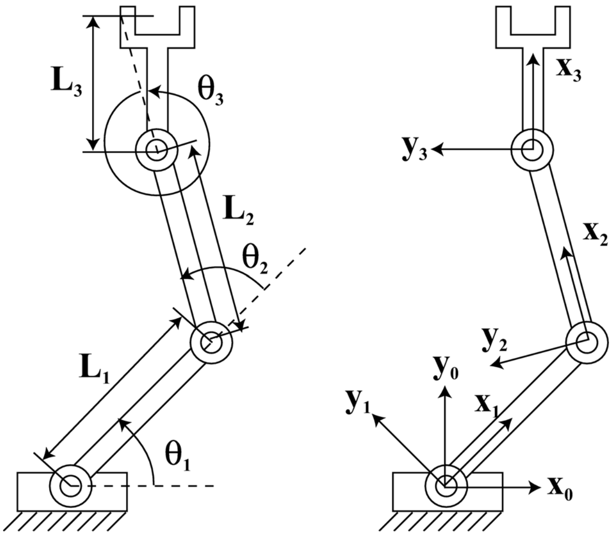

図 1: 3 リンクアーム

(5) 前問の結果を用いてリンク間変換行列 ${}^0_1\mathbf{T}$、${}^1_2\mathbf{T}$、${}^2_3\mathbf{T}$ を得た後、${}^0_3\mathbf{T}$ を求めよ．

(6) 前問の結果を用いてリンク末端座標を求めよ．

(7) 前問の結果を用いて関節速度とリンク末端速度の関係 (Jacobian) を求めよ．

(8) 図 1 の 3 リンクアームに関して、外力 $\mathbf{F}$ と関節トルク τ の関係式 $\tau = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\theta)\mathbf{F}$ を用いて、
(i)$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\pi/4, \pi/2, -\pi/4)$ の姿勢で外力 $\mathbf{F}(x, y) = (0, -1)$ を加えた場合 (図 2 左)
(ii)$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\pi/2, 0, 0)$ の姿勢で外力 $\mathbf{F}(x, y) = (-1, 0)$ を加えた場合 (図 2 右)

のそれぞれについて、ロボットアームを静的平衡に保つために必要な関節トルクを求めよ．ただし各リンク長は単位長とする．

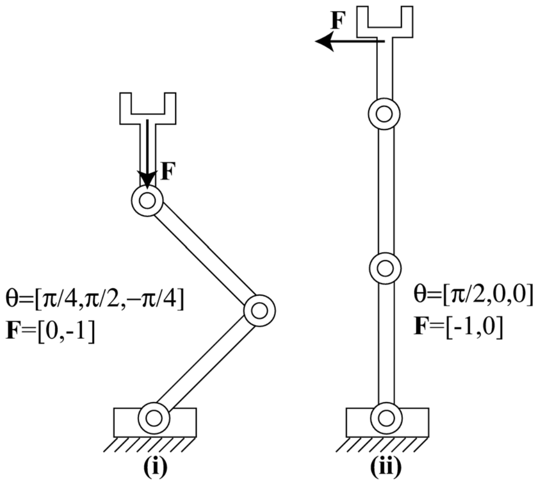

図 2: 3 リンクアームの姿勢と外力

(9) 図 3 の物体の慣性テンソル $\mathbf{I}$ を求めよ．ただし密度を ρ とする．
(慣性テンソル：

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)\rho dv & -\int xy\rho dv & -\int xz\rho dv \\ -\int xy\rho dv & \int (x^2+z^2)\rho dv & -\int yz\rho dv \\ -\int xz\rho dv & -\int yz\rho dv & \int (x^2+y^2)\rho dv \end{bmatrix})$$

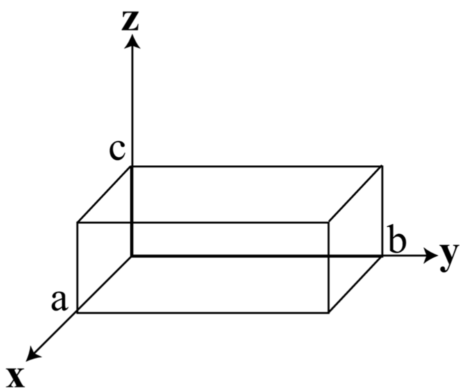

図 3: 密度一様の直方体

(10) 前問の重心周りの慣性テンソル ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{I}$ を求めよ．前問の結果と併せて平行軸の定理を確認せよ．
(平衡軸の定理 : {C} を重心座標系、{A} を任意座標系、$P_C = [x_C, y_C, z_C]$ を {A} 表記の重心座標としたとき、${}^{A}I_{zz} ={}^{C} I_{zz} + m(x_C^2 + y_C^2)$、${}^{A}I_{xy} ={}^{C} I_{xy} - m x_C y_C$．他の成分も同様)

(11) ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^{\mathrm{T}}$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

を示せ

(12) ベクトル $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_M]^{\mathrm{T}}$

マトリクス $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}$$

を示せ

(13) 未知ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_M]^{\mathrm{T}}$、
既知ベクトル $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^{\mathrm{T}}$、
既知マトリクス $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix}$
の間に $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の関係があるとき $\mathbf{x}$ を求めたい.

$N < M$ のとき、$\mathbf{x}$ の二乗ノルムが最小となる解を求めよ.
(ヒント：ラグランジュ未定乗数法を用いて $L = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + \lambda^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ とおき、$\mathbf{x}$、λ に関する偏微分を計算する)

(14) 前問の結果を用い、$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ 、$\mathbf{y} = 1$ の場合の $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ を求めよ.

(15) (13) と同様に $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ から $\mathbf{x}$ を求める.
$N > M$ のとき、誤差 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ - $\mathbf{y}$ の２乗ノルムが最小となる解を求めよ.
(ヒント：誤差の２乗ノルムを $\mathbf{x}$ で微分する)

(16)

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{A}}$$

を満たす正方行列 $\mathbf{A}$ をエルミート行列 (Hermitian matrix) という.

エルミート行列の固有値が実数であることを示せ

(17) エルミート行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交することを示せ

(18) 次のエルミート行列の固有値問題を解け

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(19) エルミート行列 $\mathbf{A}$ の 2 次形式 $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ が半正定（positive semi-definite: 全ての 0 でないベクトル $\mathbf{x}$ に対して非負）であるとき、$\mathbf{A}$ の固有値がすべて非負であることを示せ．ただし * は複素共役を表す.