解析力学演習問題回答例

1. 次の手順でラグランジェの運動方程式を導こう．括弧内を埋めよ．
   デカルト座標系を x_j，一般化座標系を q_i とおき，$x_j = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ と表す．よって，

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{1}$$

が成り立つので，

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) (x_j, q_i\text{で表現せよ}) \tag{2}$$

となる．次に x_j 方向の力を F_j とするとき，一般化力 Q_i は，F_j, x_j, q_i を用いて

$$Q_i := \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{3}$$

と定義される．さてデカルト座標系を用いると，運動エネルギーが，

$$T := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j^2 \tag{4}$$

と表される．また一般化運動量 p_i は T，$\dot{q}_i$ を用いて，

$$\text{一般化運動量：}\ p_i := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{5}$$

と定義される．よって

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{6}$$

と書ける．ここで (4) 式より

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \left(m_j \dot{x}_j \right) (m_j, \dot{x}_j\text{で表現せよ}) \tag{7}$$

が成り立つので，これと (2) を用いて

$$p_i = \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) (m_j, \dot{x}_j, x_j, q_i\text{で表現せよ}) \tag{8}$$

となる．これを t で微分して

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \right) (m_j, \ddot{x}_j, \dot{x}_j, x_j, q_i\text{で表現せよ}) \tag{9}$$

を得る．上式右辺第１項は Q_i に等しく，第２項は

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{10}$$

に等しい．つまり，

$$\frac{d}{dt}p_i = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{11}$$

を得る．上式は p_i の定義式を代入して

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \right) \tag{12}$$

と書ける．もし一般化力 Q_i がポテンシャル U によってのみ生じる場合，ラグランジェ関数

$$L := \left(\quad T - U \quad \right) (T, U \text{ を用いて表現せよ}) \tag{13}$$

を用いて (12) 式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{14}$$

と書ける．この方程式を，ポテンシャル場におけるラングランジェの運動方程式という．ポテンシャル場による力以外の q_i 方向の外力 Q'_i があるときは，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \tag{15}$$

となる．

2. 時間に依存する束縛条件がある場合を考えよう．次の括弧内を埋めよ．
デカルト座標系 x_j が，陽に時間の関数として

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{16}$$

と表される場合を考える．このとき x_j の時間微分は

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \tag{17}$$

と表されるので，

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \left(\quad \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \right) (x_j, q_i \text{で表現せよ}) \tag{18}$$

となる (つまり (2) 式と同じ)．一般化力 Q_i，一般化運動量 p_i の定義をそれぞれ (3)，(5) と同じとすると，(18) 式を用いて，(8)，(9) とまったく同じ 2 式を得る．一般化力 Q_i の定義が先の (3) と同じであるため，(9) 式の右辺第 1 項は先と同じく Q_i に等しい．一方 (17) 式より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) && (19)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) && (20)\end{aligned}$$

となるが，

$$\frac{d}{dt} = \left(\quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \right) (q_k, \dot{q}_k, t \text{ で表現せよ}) \tag{21}$$

であることに注意すると，やはり

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \tag{22}$$

を得る．上式を用いると (9) 式右辺第 2 項もやはり

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{23}$$

に等しい．よって (11) 式と同じ式が，さらに同じラグランジェの運動方程式が得られる．以上より時間に依存する束縛条件があっても，ラグランジェの運動方程式の形式は不変に保たれることがわかる．

3. あるクラスに属するエネルギーを散逸する要素が，系に存在する場合を考えよう．次の括弧内を埋めよ．
例えば速度に比例する抵抗力

$$F_j' = -k_j \dot{x}_j \tag{24}$$

は，系の持つ力学的エネルギーを消費していく外力である．この外力は

$$\text{散逸関数} \quad D := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j \dot{x}_j^2 \tag{25}$$

を定義することにより，

$$F_j' = \left(\; -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \; \right) \;\; (D, \dot{x}_j \text{で表現せよ}) \tag{26}$$

と表せるクラスに属することがわかる．(26) 式と (2) 式を用いて，

$$Q_i' = \sum_{j=1}^{n} F_j' \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{27}$$

$$= \left(\; -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \; \right) (D, \dot{x}_j, \dot{q}_i \text{で表現せよ}) \tag{28}$$

$$= -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \tag{29}$$

が得られる．よってこの場合，ラグランジェの運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{30}$$

と表せる．

4. 図 1 は，地面に対して垂直面内で回転する 2 リンク系である．その構造は，原点 O を支点として摩擦なく回転するリンク 1，リンク 1 に摩擦なく回転する関節でもって接続されているリンク 2 とからなる．リンク 1, 2 の長さ，重心の位置，質量，重心回りの慣性モーメントはそれぞれ図のように ℓ_1, ℓ_2，r_1, r_2，m_1, m_2，I_1, I_2，とする．また各関節にトルク M_1, M_2 を与える．θ_1, θ_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

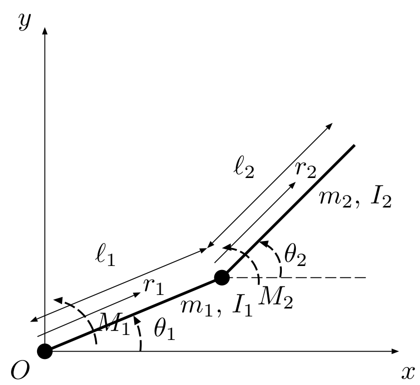

図 1：2 リンク系

図 1 略解

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2,\ T_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2,\ T_3 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2),\ T_4 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}^2 + I_2\dot{\theta}_2^2 + m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2))$$

$$x_1 = r_1\cos\theta_1,\ y_1 = r_1\sin\theta_1,\ x_2 = \ell_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2,\ y_2 = \ell_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2$$

$$T = \frac{1}{2}\{I_1\dot{\theta}_1^2 + I_2\dot{\theta}_2^2 + m_1r_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2[\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + r_2^2 + 2\ell_1r_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]\}$$

$$V = m_1gr_1\sin\theta_1 + m_2g(\ell_1\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\ell_2\sin\theta_2)$$

$$
\begin{bmatrix} I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 \ell_1^2 & m_2 \ell_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 \ell_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & I_2 + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 \ell_1 r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 \ell_1 r_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} (m_1 r_1 - m_2 \ell_1) g \cos\theta_1 \\ m_2 g r_2 \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}
$$

5. 図 2 は地上の水平面内で回転する可変長リンク系である．その構造は，原点 O を支点として水平面内を摩擦なく回転する筒状のリンク 1 と，そのリンク 1 に挿入され，摩擦なく半径方向に可動できるリンク 2 とからなる．リンク 1, 2 の重心の原点 O からの距離，質量，重心回りの慣性モーメントはそれぞれ r_1, r_2，m_1，m_2，I_1, I_2，とする．このリンク系の θ, r_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

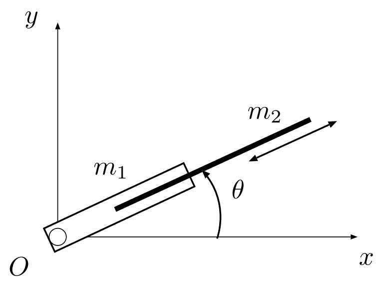

図 2：可変長振り子

略解

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2,\ \ T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2,\ \ T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2),\ \ T_4 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$x_1 = r_1 \cot\theta,\ \ y_1 = r_1 \sin\theta,\ \ x_2 = r_2 \cot\theta,\ \ y_2 = r_2 \cot\theta,$$

$$\dot{x}_1 = -r_1 \sin\theta\dot{\theta},\ \ \dot{y}_1 = r_1 \cos\theta\dot{\theta},\ \ \dot{x}_2 = \dot{r}_2 \cot\theta - r_2 \sin\theta\dot{\theta},\ \ \dot{y}_2 = \dot{r}_2 \sin\theta + r_2 \cot\theta\dot{\theta}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}^2,\ \ T_4 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$$

$$L = T - V = T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left\{(I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\dot{\theta}\right\} - 0 = 2 m_2 r_2 \dot{r}_2 \dot{\theta} + (I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_2} = \frac{d}{dt}(m_2 \dot{r}_2) - m_2 r_2 \dot{\theta}^2 = m_2 \ddot{r}_2 - m_2 r_2 \dot{\theta}^2 = 0$$

6. 図 3 は地上の水平面内で回転する 2 リンク系である．その構造は，原点 O を支点として水平面内を一定速度で回転し，角度が $\theta_1 = \omega t$ で与えられるリンク 1，リンク 1 に接続し摩擦なく回転方向に可動できるリンク 2，およびリンク 2 の先端に取りつけられた質量 m の重りからなる．リンク 1 およびリンク 2 の質量は無視できるとする．このマニピュレーターの θ_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

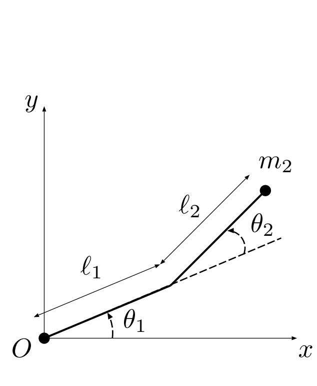

図 3：時間依存の束縛のあるリンク系

略解

$$\begin{aligned} x &= \ell_1 \cos\omega t + \ell_2 \cos(\omega t + \theta_2) \\ y &= \ell_1 \sin\omega t + \ell_2 \sin(\omega t + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\ell_1\omega \sin\omega t - \ell_2(\omega + \dot{\theta}_2) \sin(\omega t + \theta_2) \\ \dot{y} &= \ell_1\omega \cos\omega t + \ell_2(\omega + \dot{\theta}_2) \cos(\omega t + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2(\ell_1^2\omega^2 + \ell_2^2(\omega + \dot{\theta}_2)^2 \\ &\quad + 2\ell_1\ell_2\omega(\omega + \dot{\theta}_2)(\sin\omega t \sin(\omega t + \theta_2) + \cos\omega t \cos(\omega t + \theta_2))) \\ &= \frac{1}{2} m_2(\ell_1^2\omega^2 + \ell_2^2(\omega + \dot{\theta}_2)^2 + 2\ell_1\ell_2\omega(\omega + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_2(\ell_1^2\omega^2 + \ell_2^2(\omega + \dot{\theta}_2)^2 + 2\ell_1\ell_2\omega(\omega + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \frac{1}{2} m_2(2\ell_2^2(\omega + \dot{\theta}_2) + 2\ell_1\ell_2\omega\cos\theta_2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= \frac{1}{2} m_2(2\ell_2^2\ddot{\theta}_2 - 2\ell_1\ell_2\omega\sin\theta_2\dot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{2} m_2(-2\ell_1\ell_2\omega(\omega + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_2(2\ell_2^2\ddot{\theta}_2 + 2\ell_1\ell_2\omega^2\sin\theta_2) = 0$$

$$\ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\omega^2\sin\theta_2 = 0$$

7. 図 4 のようなマス・バネ・ダンパ系の，x_1, x_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

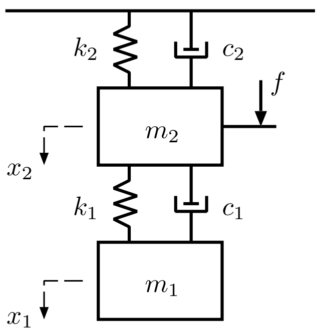

図 4：マス・バネ・ダンパ系

図 4 略解

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1,\ U_1 = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2,\ U_2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \\ D_1 &= \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2,\ D_2 = \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_2^2 \end{aligned}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2 - \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k_2 x_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1\dot{x}_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_2\dot{x}_2 + f$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_1(x_1 - x_2) - c_2\dot{x}_2 + f$$

8. 図 5 のように，円錐の壁面内部を，質量 m の質点が壁に沿って，摩擦なく運動する様子を，ラグランジェの運動方程式を用いて解析しよう．以下の問に答えよ．

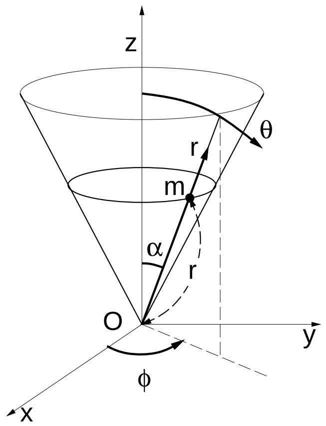

図 5：円錐形斜面と質点

(i) ポテンシャル場におけるラグランジェの運動方程式を用いて，r, ϕ に関する 2 つの運動方程式を導け．

図 5 のように座標系をとると，

運動エネルギー： $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)$

位置エネルギー： $U = mgr\cos\alpha$

となる．

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgr\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgr\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\Downarrow$$

(1) $\quad m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha$

(2) $\quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha) = 0$

(ii) 問 (i) の 2 つの運動方程式から，質点が一定の高さでまわり続けるための条件を導け．

水平円周上をまわる → $r \equiv r_o$ (一定)

→ (2) 式より $\dot{\phi}\ (= \Omega)$ 一定

→ (1) 式より $mr_o\Omega^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha = 0$

つまり $\quad r_o\Omega^2 = \frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$