解析力学演習問題

1. 次の手順でラグランジェの運動方程式を導こう．括弧内を埋めよ．
デカルト座標系を x_j，一般化座標系を q_i とおき，$x_j = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ と表す．よって，

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{1}$$

が成り立つので，

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \left(\qquad\qquad \right) (x_j, q_i \text{で表現せよ}) \tag{2}$$

となる．次に x_j 方向の力を F_j とするとき，一般化力 Q_i は，F_j, x_j, q_i を用いて

$$Q_i := \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{3}$$

と定義される．さてデカルト座標系を用いると，運動エネルギーが，

$$T := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j^2 \tag{4}$$

と表される．また一般化運動量 p_i は T，$\dot{q}_i$ を用いて，

$$\text{一般化運動量：}\ p_i := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{5}$$

と定義される．よって

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{6}$$

と書ける．ここで (4) 式より

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \left(\qquad\qquad \right) (m_j, \dot{x}_j \text{で表現せよ}) \tag{7}$$

が成り立つので，これと (2) を用いて

$$p_i = \left(\qquad\qquad \right) (m_j, \dot{x}_j, x_j, q_i \text{で表現せよ}) \tag{8}$$

となる．これを t で微分して

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) (m_j, \ddot{x}_j, \dot{x}_j, x_j, q_i \text{で表現せよ}) \tag{9}$$

を得る．上式右辺第１項は Q_i に等しく，第２項は

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{10}$$

に等しい．つまり，

$$\frac{d}{dt} p_i = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{11}$$

を得る．上式は p_i の定義式を代入して

$$\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \tag{12}$$

と書ける．もし一般化力 Q_i がポテンシャル U によってのみ生じる場合，ラグランジェ関数

$$L := \left(\qquad\qquad \right) (T, U \text{ を用いて表現せよ}) \tag{13}$$

を用いて (12) 式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{14}$$

と書ける．この方程式を，ポテンシャル場におけるラングランジェの運動方程式という．ポテンシャル場による力以外の q_i 方向の外力 Q'_i があるときは，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \tag{15}$$

となる．

2. 時間に依存する束縛条件がある場合を考えよう．次の括弧内を埋めよ．
デカルト座標系 x_j が，陽に時間の関数として

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{16}$$

と表される場合を考える．このとき x_j の時間微分は

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \tag{17}$$

と表されるので，

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \left(\qquad\qquad \right) (x_j, q_i \text{で表現せよ}) \tag{18}$$

となる (つまり (2) 式と同じ)．一般化力 Q_i，一般化運動量 p_i の定義をそれぞれ (3)，(5) と同じとすると，(18) 式を用いて，(8)，(9) とまったく同じ 2 式を得る．一般化力 Q_i の定義が先の (3) と同じであるため，(9) 式の右辺第 1 項は先と同じく Q_i に等しい．一方 (17) 式より，

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) \tag{19}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \tag{20}$$

となるが，

$$\frac{d}{dt} = \left(\qquad\qquad \right) (q_k, \dot{q}_k, t \text{ で表現せよ}) \tag{21}$$

であることに注意すると，やはり

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \tag{22}$$

を得る．上式を用いると (9) 式右辺第 2 項もやはり

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{23}$$

に等しい．よって (11) 式と同じ式が，さらに同じラグランジェの運動方程式が得られる．以上より時間に依存する束縛条件があっても，ラグランジェの運動方程式の形式は不変に保たれることがわかる．

3. あるクラスに属するエネルギーを散逸する要素が，系に存在する場合を考えよう．次の括弧内を埋めよ．
例えば速度に比例する抵抗力
$$F'_j = -k_j \dot{x}_j \tag{24}$$
は，系の持つ力学的エネルギーを消費していく外力である．この外力は
$$\text{散逸関数} \quad D := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j \dot{x}_j^2 \tag{25}$$
を定義することにより，
$$F'_j = \left(\qquad\qquad \right) \ (D, \dot{x}_j \text{で表現せよ}) \tag{26}$$
と表せるクラスに属することがわかる．(26) 式と (2) 式を用いて，
$$\begin{aligned} Q'_i &= \sum_{j=1}^{n} F'_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} && (27) \\ &= \left(\qquad\qquad \right) (D, \dot{x}_j, \dot{q}_i \text{で表現せよ}) && (28) \\ &= -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} && (29) \end{aligned}$$
が得られる．よってこの場合，ラグランジェの運動方程式は，
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{30}$$
と表せる．

4. 図 1 は，地面に対して垂直面内で回転する 2 リンク系である．その構造は，原点 O を支点として摩擦なく回転するリンク 1，リンク 1 に摩擦なく回転する関節でもって接続されているリンク 2 とからなる．リンク 1, 2 の長さ，重心の位置，質量，重心回りの慣性モーメントはそれぞれ図のように ℓ_1, ℓ_2，r_1, r_2，m_1, m_2，I_1, I_2，とする．また各関節にトルク M_1, M_2 を与える．θ_1, θ_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

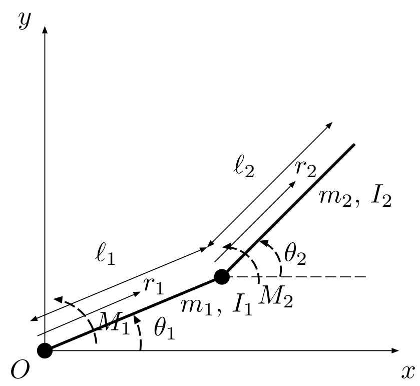

図 1：2 リンク系

5. 図 2 は地上の水平面内で回転する可変長リンク系である．その構造は，原点 O を支点として水平面内を摩擦なく回転する筒状のリンク 1 と，そのリンク 1 に挿入され，摩擦なく半径方向に可動できるリンク 2 とからなる．リンク 1, 2 の重心の原点 O からの距離，質量，重心回りの慣性モーメントはそれぞれ r_1, r_2，m_1, m_2，I_1, I_2，とする．このリンク系の θ, r_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

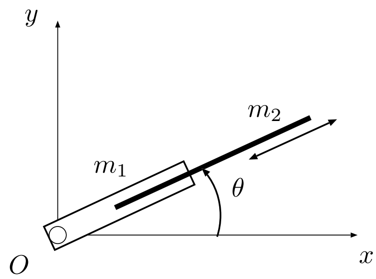

図 2：可変長振り子

6. 図3は地上の水平面内で回転する2リンク系である．その構造は，原点 O を支点として水平面内を一定速度で回転し，角度が $\theta_1 = \omega t$ で与えられるリンク1，リンク1に接続し摩擦なく回転方向に可動できるリンク2，およびリンク2の先端に取りつけられた質量 m の重りからなる．リンク1およびリンク2の質量は無視できるとする．このマニピュレーターの θ_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

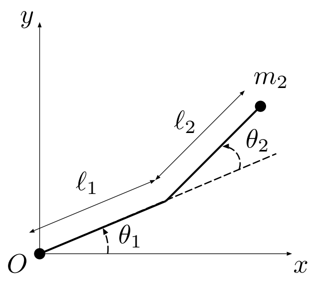

図3：時間依存の束縛のあるリンク系

7. 図4のようなマス・バネ・ダンパ系の，x_1, x_2 に関する運動方程式を，ラグランジェの方法で求めよ．

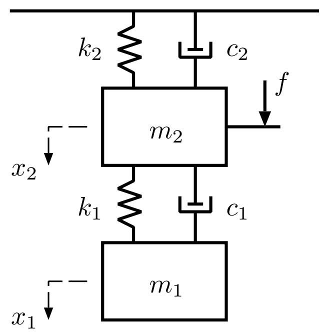

図4：マス・バネ・ダンパ系

8. 図5のように，円錐の壁面内部を，質量 m の質点が壁に沿って，摩擦なく運動する様子を，ラグランジェの運動方程式を用いて解析しよう．以下の問に答えよ．

   (i) ポテンシャル場におけるラグランジェの運動方程式を用いて，r, ϕ に関する2つの運動方程式を導け.

   (ii) 問(i)の2つの運動方程式から，質点が一定の高さでまわり続けるための条件を導け.

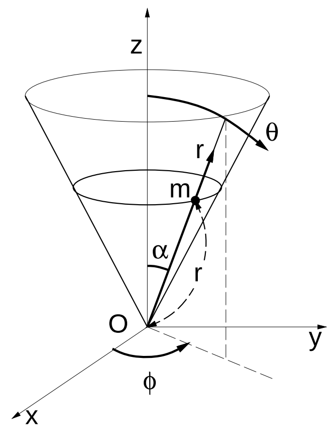

図5：円錐形斜面と質点