学術フロンティア講義（平成30年度・夏学期）
数理工学のすすめ　レポート課題

田中 健一郎
工学部 計数工学科
kenichiro@mist.i.u-tokyo.ac.jp

2018年5月24日

以下の三問のうち，一問を選んで解答すること．

問題 1. 整数 $n \geq 1$ に対し，実数 x の n 次多項式 $P_n(x)$ を

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

で定義する．また，$P_0(x) = 1$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $m > n \geq 0$ を満たす整数 m, n に対し，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$$

が成り立つことを示せ[1]．

(2) 方程式 $P_n(x) = 0$ が，区間 $(-1, 1)$ に n 個の相異なる解 $x_1, \ldots, x_n$ を持つことを示せ．

問題 2. 以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{Re}\, z > 0$ を満たす複素数 z および実数 $\alpha \in (0, 1)$ に対して，積分

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha - 1}}{t + z} dt$$

が有限の値として定まることを示せ．

(2) $\mathrm{Re}\, z > 0$ を満たす複素数 z および実数 $\alpha \in (0, 1)$ に対して，次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{r^{\alpha-1}\, e^{i(\alpha-1)\theta}}{r\, e^{i\theta} - z}\, ri\, e^{i\theta}\, d\theta = 0.$$

（ヒント：被積分関数の絶対値をとったものの積分で上から評価する）

[1] ここでは，本日の講義の内容において，重み関数 $\omega(x)$ が $\omega(x) = 1$ である場合を考えていることになる．

(3) A を n 次正定値エルミート行列とし，その固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ とおく．そして，A がユニタリ行列 U で $A = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, U$ と対角化されるとする[2]．このとき，行列

$$\frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} A \int_{-1}^{1} (1+s)^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1} \left\{(1-s)I + (1+s)A\right\}^{-1} ds$$

が行列 $U^* \operatorname{diag}(\lambda_1^\alpha, \ldots, \lambda_n^\alpha)\, U$ に一致することを示せ．

問題 3. 現実世界の問題に対して行われている大規模な数値計算の例を一つとりあげ，それについて書籍やインターネット等で調べ，まとめよ．参考とした資料を明記すること．例えば，本日示した論文

M. Fasi and B. Iannazzo: Computing the weighted geometric mean of two large-scale matrices and its inverse times a vector. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **39** (2018), pp. 178–203. `https://doi.org/10.1137/16M1073315`

およびその中の参考文献を利用してもよい．

[2]記号 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ で，対角成分が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ であるような対角行列を表すものとする．