

以下のうち 2 問以上に答えよ。なお、数式においてすべての量は実数とする。

配布資料にあった誤植は赤字で修正してあります。また、おすすめ文献を追加しました。

問 1. Hopf 分岐

次の微分方程式系について考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \omega y - (x^2 + y^2)x \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + ay - (x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

ここで、 $x(t), y(t), t$ は変数、 a, ω は定数である。 $(x, y) = (0, 0)$ を右辺に代入すると $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ となることから、 $(x, y) = (0, 0)$ が平衡解であることがわかる。一方、 a の値によっては、 $x = r_0 \cos \theta(t), y = r_0 \sin \theta(t)$ で与えられる周期解を持つ。つまり、ある a の値において Hopf 分岐を起こす。周期解を持つための a の条件と、定数 r_0 , 変数 $\theta(t)$ を求めよ。もし可能であれば、平衡解と周期解の安定性を議論せよ (ヒント: $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のしたがう微分方程式を導出し、その平衡解の安定性を考える)。

問 2. カオス

Circle map と呼ばれる次の漸化式について考える。

$$x_{n+1} = x_n + b - a \sin 2\pi x_n \tag{19}$$

この方程式は、 a と b の値によっては、(i) 平衡解や (ii) 周期解に収束したり、(iii) 不規則な時系列 (カオス) が生み出される。このことを方程式を数値的に解くことによって確かめよ。(i),(ii),(iii) を生み出す a, b の値と、その時の時系列を出力すること。 b は 0 に固定しても良い。エクセルを使用するのが簡単だと思うが、どのようなプログラミング言語・描画ソフトを用いてもよい。エクセルで logistic map ($x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$) の時系列を生成するサンプルシートが以下にあるので、参考にしてよい：
<http://www.hk.k.u-tokyo.ac.jp/DL/logistic.xlsx>

問 3. 作文

以下について作文せよ。

- (1) 講義の中で、特に興味深いと思った箇所を挙げ、その概略を説明せよ。またもし何か応用が考えられれば、それを説明せよ。
- (2) 自然現象や社会現象のなかで、興味のある複雑な現象について説明せよ。可能であれば、その発生原因やメカニズムを考察せよ。

おすすめ文献

本講義は非線形科学，力学系，複雑系と呼ばれる分野に基づいています。
以下，学部生が無理なくよめる一般書・専門書を紹介します。

- 蔵本由紀著 新しい自然学: 非線形科学の可能性 (ちくま学芸文庫)
- 蔵本由紀著 非線形科学—同期する世界—
※以上2点，私の師匠の著作です。私は蔵本さんから，抽象的記述から本質に切り込むことを教わりました。これらの本は一般向けのはずですが，正直一般向けというよりかは，初学者向け啓蒙書で，蔵本さんの思想がよく伝わる本です。
- 金子邦彦著：生命とは何か—複雑系生命科学へ（東京大学出版会）
※複雑系といえばこの人。長年に渡り世界的に活躍してきた方です。彼の一連の研究は多くの人に唯一無二のインスピレーションを与えていると思います。
- 山口昌哉著：カオスとフラクタル (ちくま学芸文庫)
※カオスの入門書として。コンパクトで楽しく読めます。
- Edward Ott 著：Chaos in dynamical systems
※カオスを勉強したい人のために。ちょっとむずかしいかも。でも素晴らしい本です。
- Strogatz 著：Nonlinear Dynamics and Chaos (日本語訳あり)
※力学系の基礎から応用まで非常に丁寧に説明されている良書です。学部1年生でも読め，私自身，今でも学ぶことの多い本です。
- 郡宏&森田善久著：生物リズムと力学系 (共立出版)
※私の著作です。同期現象の数理的記述に興味があるひとは是非覗いてみてください。